Vorlesung Differentialtopologie

Wintersemester 2006/07 FU Berlin

David Ploog (ploog@math.fu-berlin.de)

Nicht gemacht:
Einbettung nicht-kompakter Mannigfaltigkeiten zitiert aus **Wh**.
Existenz geodätisch konvexer Karten für gute Überdeckungen nur zitiert aus **Sp** Ex. 32(f), p. 491.
Morse-Theorie (knapp in **BT** §17, p. 220; ausführlich in **Mi**)

BT R. Bott, L. Tu: Differential Forms in Algebraic Topology, Springer GTM 82 (1982).
GH P. Griffiths, J. Harris: Principles of Algebraic Geometry, Wiley & Sons (1978)
GP V. Guillemin, A. Pollack: Differential Topology, Prentice-Hall (1974).
H M.W. Hirsch: Differential Topology, Springer GTM 33 (1976).
Mi J. Milnor: Morse Theory, Princeton University Press (1963)
M J.R. Munkres: Topology, Prentice-Hall (2000).
S M. Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish (1979)
W F. Warner: Foundations of Diffentiable Manifolds and Lie Groups, Springer GTM 94 ().
Wh H. Whitney: Differentiable Manifolds, Annals of Math. 2/37 (1936).

Die beiden wesentlichen Bücher zur Vorlesung sind **GP** (Untermannigfaltigkeiten und Schnitttheorie) sowie **BT** (de Rham-Kohomologie). Weitere und weiterführende Literatur:
M: Parakompaktheit in §41, Zerlegung der 1 in §36
GH: Leftschetz-Spurformel in 3.4
W: Lie-Gruppen, Garbenkohomologie und Äquivalenz aller Kohomologietheorien
H: Approximationstheorie, Kobordismen

Aufgaben zur Differentialtopologie

Aufgabe 1. Es sei $X \subset \mathbb{R}^3$ das durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ definierte Hyperboloid. Zeigen Sie, dass X eine Mannigfaltigkeit ist und fertigen Sie ein Bild an. Bestimmen Sie die Tangentialräume T_pX und T_qX (als Unterräume von $\mathbb{R}^3$) für $p = (2,0,0)$ und $q = (2,1,1)$; zeichnen Sie diese ein.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden zwei Karten für den Nordpol $N = (0,0,1)$ der 2-Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z + 2 = 1\}$:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 : B_1(0) \to S^2, & (s,t) \mapsto (s,t,\sqrt{1-s^2-t^2}) \\ \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to S^2 & \text{durch stereographische Projektion} \end{array}$$

Wir schreiben die Koordinatensysteme als $\varphi_1^{-1} = (x_1, x_2)$ und $\varphi_2^{-1} = (y_1, y_2)$. Drücken Sie die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ durch die $\frac{\partial}{\partial y_j}(p)$ aus für $p = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ sowie $p = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Stellen Sie außerdem in beiden Basen den Tangentialvektor dar, der durch den Großkreis zwischen diesen zwei Punkten gegeben wird.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $M(2)_1 := \{A \in M(2) \,:\, \mathrm{rk}(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie allgemeiner, dass die Menge $M(n,m)_r$ der $n \times m$-Matrizen vom Rang r eine Mannigfaltigkeit ist. Was ist die Dimension von $M(n,m)_r$?

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass der Rang einer glatten Abbildung generisch nur steigen kann. D.h. dass für $f : X \to Y$ glatt, $p \in X$ und $\mathrm{rk}(df_p) = r$ eine Umgebung $U(p) \subset X$ existiert mit $\mathrm{rk}(df_x) \geq r$ für alle $x \in U$.

Aufgabe 5. Für welche $a > 0$ schneiden sich die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und das Hyperboloid $x^2 + y^2 = a + z^2$ transversal? Zeichnen Sie die verschiedenen Schnitte, die auftreten können.

Aufgabe 6. $X, Z \subset Y$ seien transversale Untermannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass für alle $y \in X \cap Z$ gilt: $T_y(X \cap Z) = T_yX \cap T_yZ$. Finden Sie nicht-transversale Untermannigfaltigkeiten, deren Durchschnitt dennoch eine Mannigfaltigkeit der korrekten Kodimension ist. Gilt die obige Formel für die Tangentialräume dann immer noch?

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$ eine lokal-triviale Faserung mit Fasertyp S^1 ist. Warum ist sie nicht global trivial?
(Eine Beschreibung der Hopf-Faserung benutzt stereografische Projektion $S^2 \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, die Projektion $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sowie $S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ als Einheitssphäre.)
Zusatz: Ist das Hopf-Bündel ein Unterbündel von TS^2?

Aufgabe 8. Jede kompakte n-Mannigfaltigkeit besitzt eine Immersion in den $\mathbb{R}^{2n}$.
Zeigen Sie, dass der gelochte Torus $(S^1 \times S^1) \setminus \{p_0\}$ sogar in den $\mathbb{R}^2$ immersiert werden kann.

Aufgabe 9. Für eine Mannigfaltigkeit X mit Rand zeige man $\partial\partial X = \varnothing$. Falls $\partial X = \varnothing$ gilt, finde man eine Mannigfaltigkeit Y mit Rand $\partial Y = X$. Wenn X kompakt ist, kann man dann Y auch kompakt wählen?

Aufgabe 10. Welches Orientierungsverhalten haben die folgenden Abbildungen?

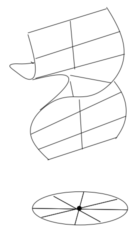
$$\begin{array}{ll} c : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} & \text{Konjugation} \\ a : S^n \xrightarrow{\sim} S^n & \text{antipodale Abbildung} \\ b : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}},\ (x_0 : \cdots : x_3) \mapsto (-x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \\ h : S^3 \to S^2 & \text{Hopf-Faserung} \end{array}$$

Aufgabe 11. Es sei $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ mit komplexen Koordinaten z_0, z_1. Wir betrachten

$$X := \{((z_0, z_1), (w_0 : w_1)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \; : \; z_1 w_0 = z_0 w_1\}$$

mit den beiden Projektionen $\pi : X \to \mathbb{C}^2$ und $p : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

a) X ist eine 4-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.
b) $\pi|_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist Isomorphismus und $\pi^{-1}(0) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.
c) $p : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist ein Vektorbündel vom Rang 2 auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.
d) X ist diffeomorph zur zusammenhängenden Summe von $\mathbb{C}^2$ und $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; mit Orientierungen gilt sogar $X \cong \mathbb{C}^2 \# (-\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.



$\pi : X \to \mathbb{C}^2$ nennt man *Aufblasung* von $\mathbb{C}^2$ im Ursprung.
$p : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ heißt *tautologisches Bündel* auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für eine kontrahierbare Mannigfaltigkeit Y alle Schnittzahlen verschwinden: $I_2(f, Z) = 0$, wenn $f : X \to Y$ glatt, X kompakt und $Z \subset Y$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeit (beide ohne Rand) mit $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$.
Folgern Sie daraus, dass eine kompakte, randlose Mannigfaltigkeit niemals kontrahierbar sein kann (mit Ausnahme von Punkten).

Aufgabe 13. Es sei $Z \subset Y$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit mit $\dim(Z) = \frac{1}{2}\dim(Y) =: n$. Zeigen Sie:

Z ist durch n globale, unabhängige Funktionen gegeben,
d.h. $Z = F^{-1}(0)$ für eine Submersion $F : Y \to \mathbb{R}^n$.
$\iff$ das Normalenbündel von Z in Y ist trivial, d.h. $N_Y Z \cong Z \times \mathbb{R}^n$
$\implies$ $I_2(Z, Z) = 0$

Beispiel: Der Kreis $Z = S^1$ wird im Möbiusband Y nicht durch eine Gleichung ausgeschnitten.

Aufgabe 14. Beweisen Sie folgende Version von Borsuk-Ulam: eine glatte, ungerade Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ hat nicht-verschwindende Windungszahl $W_2(f, 0) = 1$ bezüglich des Ursprungs.
[Tipp: Induktion über n mit der Zerlegung von S^n in Äquator und Polkappen.]

Aufgabe 15. Zeigen Sie $\deg(gf) = \deg(g)\deg(f)$ für glatte Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwischen kompakten, zusammenhängenden und randlosen Mannigfaltigkeiten.
Zeigen Sie $\deg(f_n) = n$ für $f_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 16. Wir betrachten den Torus $Y = S^1 \times S^1$ mit den zwei Kurven

$$\begin{aligned} B &:= S^1 \times \{1\} \\ C_n &:= \{(e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i t}) \; : \; t \in [0,1]\} \qquad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Schnittzahlen $I(B, C_n)$ und $I(C_n, C_m)$ nach Orietungswahlen für Y, B, C_n.

Aufgabe 17. Zeigen Sie mit Lefschetz-Abbildungen

$$\chi(S^k) = \begin{cases} 2, & 2 | k \\ 0, & 2 \nmid k \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem $\chi(G) = 0$ für kompakte Lie-Gruppen G sowie $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$ für X, Y kompakt, randlos, orientiert.

Können Sie mit dieser Methode auch $\chi(X) = \chi(B) \times \chi(F)$ für eine lokal-triviale Faserung $f : X \to B$ mit Fasertyp F zeigen? (Dabei sind B, F, X kompakt, randlos, orientiert.)

Aufgabe 18. Beweisen Sie die Invarianz der kombinatorischen Euler-Charakteristik $\chi(K) = \sum_i (-1)^i \#(K^i)$ eines endlichen simplizialen Komplexes K (dabei ist K^i das i-Skelett, also die Teilmenge aller i-Simplizes von K). Berechnen Sie $\chi(S^n)$ kombinatorisch.

Aufgabe 19. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Formen:

a) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$
b) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$
c) $(fg)^*\omega = g^* f^* \omega$
d) $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{p_1 p_2} \omega_2 \wedge \omega_1$
e) $f^*(d\phi) = d(f^*\phi)$,

dabei sind $\omega, \omega_1, \omega_2$ glatte Formen auf X der Grade p, p_1, p_2, weiter $f : Y \to X$ und $g : Z \to Y$ glatte Abbildungen und $\phi : X \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.
[Tipp: Man beweise zunächst die entsprechenden Aussagen der linearen Algebra (außer für e).]

Aufgabe 20. Gelten die folgenden Regeln für Differentialformen?

a) α geschlossen, β geschlossen $\implies$ $\alpha \wedge \beta$ geschlossen?
b) α geschlossen, β exakt $\implies$ $\alpha \wedge \beta$ exakt?
c) $\alpha \wedge \alpha = 0$?

Aufgabe 21. Wir betrachten die folgende 1-Form auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$\omega = \frac{x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist. Zeigen Sie weiter, dass ω nicht exakt ist (berechnen Sie $\int_{S^2} \omega$).

Aufgabe 22. Beweisen Sie $H^1_{dR}(S^2) = 0$, d.h. dass jede geschlossene 1-Form auf S^2 exakt ist.

Aufgabe 23. Es seien $f_0, f_1 : X \to Y$ zwei homotope, glatte Abbildungen, außerdem X randlos und n-dimensional. Für eine geschlossene n-Form ω auf Y zeige man

$$\int_X f_0^* \omega = \int_X f_1^* \omega.$$

[Tipp: Man betrachte $X = \partial W$ mit kompaktem W sowie $G : W \to Y$ und zeige $\int_X G^*\omega = 0$.]

Aufgabe 24. Zeigen Sie, dass eine geschlossene 1-Form auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit exakt ist.
[Tipp: Falls $\pi_1(X) = 0$, so gilt $\int_\gamma \omega = 0$ für $\omega \in \Omega^1(X)$ mit $d\omega = 0$ und $\gamma : S^1 \to X$.]

Aufgabe 25. Fünfer-Lemma Das folgende Diagramm von $\mathbb{R}$-Vektorräumen sei kommutativ mit exakten Zeilen; f^1, f^2, f^4, f^5 seien Isomorphismen. Zeigen Sie, dass dann f^3 ebenfalls ein Isomorphismus ist. Kann man die Voraussetzungen abschwächen?

$$\begin{tikzcd} V^1 \arrow[r, "\mu^1"] \arrow[d, "f^1"] & V^2 \arrow[r, "\mu^2"] \arrow[d, "f^2"] & V^3 \arrow[r, "\mu^3"] \arrow[d, "f^3"] & V^4 \arrow[r, "\mu^4"] \arrow[d, "f^4"] & V^5 \arrow[d, "f^5"] \\ W^1 \arrow[r, "\nu^1"] & W^2 \arrow[r, "\nu^2"] & W^3 \arrow[r, "\nu^3"] & W^4 \arrow[r, "\nu^4"] & W^5 \end{tikzcd}$$

Aufgabe 26. Berechnen Sie die Betti-Zahlen der folgenden Mannigfaltigkeiten: n-Sphäre S^n, 3-Torus T^3, M_3 kompakte orientierte Fläche vom Geschlecht 3. Können Sie auch die Ringstruktur von $H^*_{dR}(X)$ in diesen Fällen bestimmen?

Aufgabe 27. Leiten Sie die lange exakte Mayer-Vietoris-Folge für die de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger her: $\cdots \to H^i_c(U \cap V) \to H^i_c(U) \oplus H^i_c(V) \to H^i_c(U \cup V) \xrightarrow{d_*} H^{i+1}_c(U \cap V) \to \dots$

Aufgabe 28. Beweisen Sie das Poincaré-Lemma für die de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger: $H^{i+1}_c(X \times \mathbb{R}) = H^i_c(X)$ für eine randlose Mannigfaltigkeit X.