Übungsaufgaben Torische Geometrie

1. Es sei $P \subsetneq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) P is Primideal.

(ii) Der Ring R/P ist nullteilerfrei.

(iii) Für Elemente $r_1, r_2 \in R$ mit $r_1 r_2 \in P$ gilt $r_1 \in P$ oder $r_2 \in P$.

(iv) Für Ideale $I_1, I_2 \subset R$ mit $I_1 \cdot I_2 \subseteq P$ gilt $I_1 \subseteq P$ oder $I_2 \subseteq P$.

(v) Die Menge $S := R \setminus P$ ist multiplikativ abgeschlossen: $1 \in S$ und aus $s_1, s_2 \in S$ folgt $s_1 s_2 \in S$.

2. Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum und $M := \mathrm{Max}(C(X))$ die Menge aller Maximalideale in dem Ring der stetigen Funktionen $C(X)$. Zeigen Sie, dass M mit der Zariski-Topologie ebenfalls Hausdorffsch ist.

3. Für $f := x^2 - y^2, g := x^3 + xy^2 - y^3 - x^2 y - x + y \in \mathbb{C}[x, y]$, finden Sie die irreduziblen Komponenten von $V(f) \cap V(g) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Zeichnen Sie $V(f)$ und $V(f) \cap V(g)$.

4. Finden Sie alle rationalen Lösungen für $x^2 + y^2 = 1$, also $V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$. (Tipp: schneiden Sie die Varietät mit geeigneten Geraden.)

5. Es sei $H \subseteq \mathbb{N}$ die von 2 und 3 erzeugte Halbgruppe und $\mathbb{C}[H]$ ihr Halbgruppenring.
(a) Finden Sie Gleichungen für die algebraische Varietät X mit $A(X) \cong \mathbb{C}[H]$.
(b) Zeichnen Sie ein reelles Bild für X.
(c) Geben Sie eine polynomiale Abbildung $\varphi \colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to X$ an.
(d) Zeigen Sie, dass φ Bijektion und Homöomorphismus ist, aber kein Isomorphismus.

6. Sei $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass σ ein polyedrischer Kegel ist (also der Durchschnitt endlicher vieler Halbräume) genau dann, wenn σ endlich erzeugt ist (also von der Form $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$).

7. Es seien L eine kommutative Halbgruppe und $H \subset L$ eine Unterhalbgruppe. Wir betrachten die Menge

$$\overline{H} := \{ l \in L \mid \exists_{n \in \mathbb{N}_{>0}} nl \in H \}.$$

Zeigen Sie, dass $\overline{H}$ eine Unterhalbgruppe von L ist mit $H \subseteq \overline{H}$ und zeigen Sie, dass $\overline{H}$ saturiert in L ist.
Was ist $\overline{H}$ für die Halbgruppe H aus Aufgabe 5?

8. Beschreiben Sie die durch die folgenden Kegel gegebenen affinen torischen Varietäten mittels polynomialer Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \sigma_1 = \langle (1,3), (2,-1) \rangle & \text{in } \mathbb{Z}^2 \\
(2) & \sigma_2 = \langle e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3 \rangle & \text{in } \mathbb{Z}^3 \\
(3) & \sigma_3 = \langle e_1, e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3 \rangle & \text{in } \mathbb{Z}^3
\end{array}$$

9. Es sei $X = V(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ eine ebene Kurve, und Y ihre Normalisierung.
(a) Beschreiben die Varietät Y und die Abbildung $Y \to X$.
(b) Warum ist X keine affine torische Varietät?

10. Es sei $\sigma = \langle(1,0),(1,2)\rangle$ ein Kegel in $\mathbb{Z}^2$ und X_σ die zugehörige affine torische Varietät. Beschreiben Sie die Wirkung des Torus $\mathbb{T}^2 = K^* \times K^*$ auf X und auf $A(X)$.

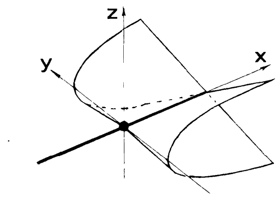
11. Wir betrachten die drei Varietäten $\mathbb{A}^2$, $T := (K^*)^2$ und $Z := V(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3$ und die Punkte $o = (1,1) \in \mathbb{A}^2$, $t := (1,1) \in T$, $z := (0,0,0) \in Z$ mit den Maximalidealen $\mathfrak{m}_o, \mathfrak{m}_t, \mathfrak{m}_z$. Zeigen Sie $A(\mathbb{A}^2)_{\mathfrak{m}_o} \cong A(T)_{\mathfrak{m}_t} \not\cong A(Z)_{\mathfrak{m}_z}$ für die Lokalisierungen.

12. Zeigen Sie, dass die affine Varietät $V(xy - zw) \subset \mathbb{A}^4$ torisch ist: geben Sie Kegel und Gitter an, und beschreiben Sie Torus-Wirkung und -Orbiten.

13. Berechnen Sie $\mathrm{Sing}(X)$ und $\mathrm{Sing}(Y)$ für

$$X := V(y^2 + y - x^4) \subset \mathbb{A}^2,$$

$$Y := V(xy^2 - z^2) \subset \mathbb{A}^3.$$



14. Finden Sie eine Toruswirkung von $\mathbb{T}^2$ auf Y und beschreiben Sie Y durch eine Halbgruppe (also $A(Y) = K[H]$ mit $H \subseteq \mathbb{Z}^2$). Ist Y normal, also eine torische Varietät?

15. Gegeben seien die drei Polynome $f_1 := y - x^2$, $f_2 := y - (x-1)^2$ und $f_3 := y - 2x^2 - 1$. Bestimmen Sie die Homogenisierungen F_1, F_2, F_3 der Polynome und berechnen Sie die Schnittmengen (mit Vielfachheiten) von

$$\begin{array}{ll} V(f_1), V(f_2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, & V(f_1), V(f_3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, \\ V(f_1), V(f_2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}, & V(f_1), V(f_3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}, \\ V(F_1), V(F_2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, & V(f_1), V(f_3) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \\ V(F_1), V(F_2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, & V(f_1), V(f_3) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}. \end{array}$$

16. Finden Sie eine Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^n$. Erweitern Sie Ihre Lösung zu Einbettungen $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \hookrightarrow \mathbb{P}^{n(a,b)}$ für $a, b \in \mathbb{N}$.

17. Duale Kegel:

(i) Zeigen Sie $\check{\check{\sigma}} = \sigma$.

(ii) Dualisieren Sie die Kegel aus Aufgabe 8.

18. Fächer:

(i) Geben Sie einen Fächer für $\mathbb{P}^3$ an.

(ii) Beschreiben Sie die Varietäten für die folgenden zwei Fächer:

$$\langle(1,0),(0,1)\rangle, \langle(-1,0),(0,1)\rangle, \langle(0,-1)\rangle \qquad + \text{ Seiten;}$$
$$\langle(1,0),(0,1)\rangle, \langle(-1,0),(0,-1)\rangle \qquad + \text{ Seiten.}$$

19. Es sei Σ der Standardfächer für $\mathbb{A}^2$ (also mit dem maximalen Kegel $\langle(1,0),(0,1)\rangle$) und es sei Σ' die Unterteilung von Σ durch den Strahl $\langle(1,1)\rangle$. Zeigen Sie, dass die Fächerabbildung $\Sigma' \to \Sigma$ die Aufblasungsprojektion $\pi\colon B = X_{\Sigma'} \to X_\Sigma = \mathbb{A}^2$ induziert.

20. Zeigen Sie durch eine explizite Parametrisierung, dass die Kurve $V(y^2 - x^2 - x^3)$ rational ist.

21. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X Hausdorff ist genau dann, wenn die Diagonale $\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$ ein abgeschlossene Teilmenge ist.
Warum ist eine affine Varietät V, zum Beispiel $V = \mathbb{A}^1_K$ (mit der Zariski-Topologie) nicht Hausdorff, obwohl Δ_V Zariski-abgeschlossen in $V \times V$ ist?

22. Zeigen Sie, dass alle glatten, vollständigen torischen Flächen mit vier Strahlen von der Form F_a mit $a \in \mathbb{N}$ sind, also genau die Hirzebruch-Flächen.

23. Bestimmen Sie die dualen Polytope von Tetraeder und Würfel.

```
loadPackage "NormalToricVarieties.m2"

rayList = {{1,0},{0,1},{-3,2},{-1,0},{0,-1}}
coneList = {{0,1},{1,2},{2,3},{3,4},{0,4}}
X = normalToricVariety(rayList, coneList)
dim(X) 2
isSmooth(X) no
isComplete(X) yes

rayList = {{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1},{-1,-1,-1}}
coneList = {{0,1,2},{1,2,3}}
Y = normalToricVariety(rayList, coneList)
dim(Y) 3
isSmooth(Y) yes
isComplete(Y) no
```