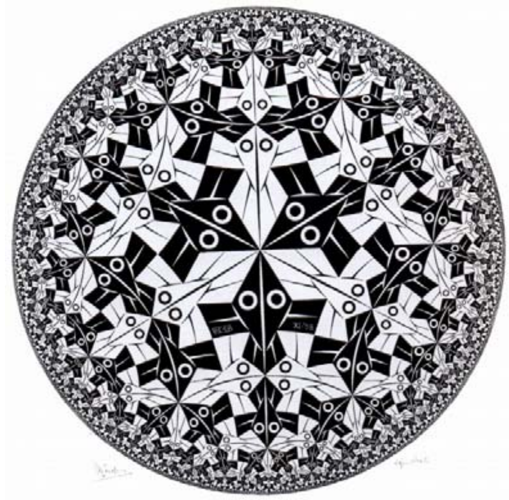
CLUB APOLLO 13, AUFGABE 3: Jenseits von Euklid

Die dritte Aufgabe wird vom Fachbereich Mathematik der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studiengang der Mathematik findet ihr unter:
http://www.math.uni-hannover.de/ .



Jeder weiß, dass Geraden Längen minimieren: Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten in der Ebene ist die Strecke zwischen ihnen, also ein endlicher Teil einer Geraden. In dieser Aufgabe werden wir zwei Verallgemeinerungen der uns bekannten Ebene kennenlernen und sehen, welche (Art) Kurven dort die Rolle der Geraden übernehmen. Eine dieser Verallgemeinerungen ist die *hyperbolische Ebene*, oft vom bekannten Künstler M.C. Escher dargestellt, so auch im Holzschnitt „Circle Limit I“.
Weiterhin interessieren wir uns für Bewegungen, die Abstände und Winkel unverändert lassen. In der klassischen ebenen Geometrie sind dies Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen. Solche abstandstreue Abbildungen werden als *Isometrien* bezeichnet.

Die Aufgaben
a) (5 Punkte):
Gegeben seien zwei Geraden in der Ebene, die sich in einem Winkel von 30° schneiden.

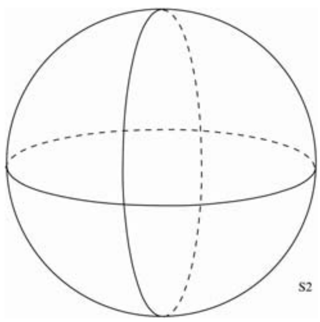
- Welche Abbildung kommt heraus, wenn man erst an der einen Geraden und dann an der anderen Geraden spiegelt?
- Und welche Abbildung erhaltet ihr, wenn ihr nacheinander an zwei parallelen Geraden spiegelt? (Wir erinnern daran, dass zwei Geraden parallel sind, wenn sie sich nicht schneiden.)

Die folgenden Eigenschaften von Geraden in der Ebene schrieb der griechische Mathematiker Euklid vor 2300 Jahren in seinen berühmten „Elementen“ auf:

- *Geradenaxiom*: Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- *Parallelenaxiom*: Zu einer Geraden und einem nicht auf ihr liegenden Punkt gibt es genau eine parallele Gerade durch den Punkt.

Als Würdigung von Euklid bezeichnen wir die herkömmliche (und Euch bekannte) Ebene mit E^2, wobei das E für Euklid steht und 2 die Dimension angibt.

Nun wollen wir uns mit zwei sogenannten nicht-euklidischen Geometrien befassen. Zunächst schauen wir auf die 2-dimensionale Sphäre S^2, das ist die Oberfläche der Kugel vom Radius 1.



b) (5 Punkte):
Gegeben sind zwei beliebige Punkte P und Q auf S^2. Beschreibt mit Worten eine Kurve kürzester Länge von P nach Q auf der Kugeloberfläche S^2.

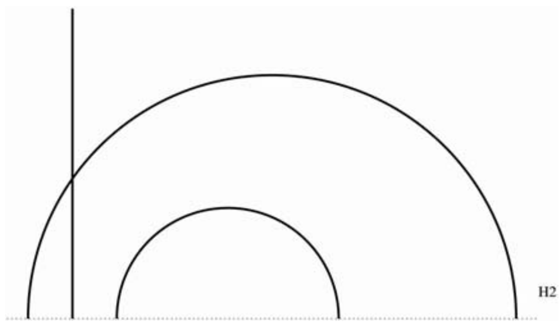
Ganz genau so wie sich Strecken in E^2 zu Geraden verlängern lassen, können auch die abstands-minimierenden Kurven auf S^2 erweitert werden. In der Differenzialgeometrie werden solche (maximal verlängerten) Kurven *Geodäten* genannt.

c) (5 Punkte):

- Gelten die beiden o.g. Axiome für S^2, wenn man „Gerade“ durch „Geodäte“ ersetzt? (Zwei Geodäten heißen parallel, wenn sie sich nicht schneiden.)
- Falls nicht, wie könnte man die Axiome für S^2 anpassen?

Seit dem Erscheinen der 'Elemente' versuchten griechische, dann arabische und später vorwiegend italienische Mathematiker das Parallelenaxiom zu beweisen, das heißt aus Euklids restlichen Axiomen (Euklid hatte insgesamt fünf[1]) herzuleiten. Die sphärische Geometrie S^2 war da kein stichhaltiges Gegenargument, weil ja schon das Geradenaxiom verletzt ist.

In zwei um 1830 unabhängig voneinander erschienenen Arbeiten zeigten der Ungar János Bolyai und der Russe Nikolai Lobatschewski die Existenz einer Geometrie, die alle Axiome (Euklids und Hilberts) bis auf das Parallelenaxiom erfüllt: die *hyperbolische Ebene* H^2. In einem Brief an Bolyais Vater enthüllt der berühmte Mathematiker Gauss, dass er ebenfalls im Besitz der hyperbolischen Ebene war, aber die Veröffentlichung wegen des zu erwartenden „Geschreis der Böotier[2]“ scheute. Heutzutage müssen wir die Böotier und ihr Geschrei nicht mehr fürchten, jedenfalls nicht in geometrischen Fragen, und können darum weitermachen.



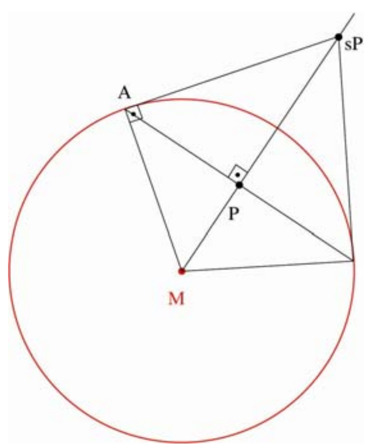
Ein Modell für H^2 erhalten wir so: Fixiere eine Gerade in der Ebene und benutze eine der beiden Halbebenen. Normalerweise nimmt man die Gerade $y = 0$ und die obere Halbebene, so dass H^2 die Menge aller Punkte $(x; y)$ mit $y > 0$ gleich 0 ist. Wir geben diesmal vor, wie die Geodäten aussehen: Zum einen alle Strahlen, die senkrecht auf der Randgeraden stehen und zum anderen alle Halbkreise mit Mittelpunkt auf der Randgeraden.

d) (5 Punkte):

- Zeigt, dass das Geradenaxiom gilt (wieder mit „Gerade“ durch „Geodäte“ ersetzt).
- Zeigt, dass jedoch das Parallelenaxiom verletzt ist: Wie viele Geodäten durch den Punkt (3; 1) gibt es, die parallel zum senkrechten Strahl in (0; 0) sind?

Den Abstand zwischen zwei Punkten auf einem senkrechten Strahl, $(x; y_1)$ und $(x; y_2)$, wird als $|\ln(y_1 / y_2)|$ definiert[3]. Um Abstände zwischen beliebigen Punkten berechnen zu können, benötigen wir eine Konstruktion (mit Zirkel und Lineal in E^2) der elementaren Geometrie, nämlich die Kreisspiegelung:

Gegeben ein Kreis mit Mittelpunkt M sowie ein Punkt P (ungleich M). Falls P innerhalb des Kreises liegt, dann errichten wir die Senkrechte an den Strahl MP im Punkt P und bezeichnen einen Schnittpunkt mit dem Kreis als A. Schließlich bilden wir die Tangente in A an den Kreis, und ihr Schnittpunkt mit dem Strahl MP ist der gesuchte Bildpunkt $s(P)$. Falls P außerhalb des Kreises liegt, dann bilden wir zunächst eine Tangente, die den Kreis in A berührt. Das Lot von A auf den Strahl MP ist dann der Bildpunkt $s(P)$.



[1] Seine 'Elemente' galten jahrhundertelang als Musterbeispiel mathematischer Strenge. Aber nichts ist für die Ewigkeit und 1899 gab David Hilbert eine wesentlich präzisere Axiomatik der Euklidischen Geometrie - mit zwanzig Axiomen.

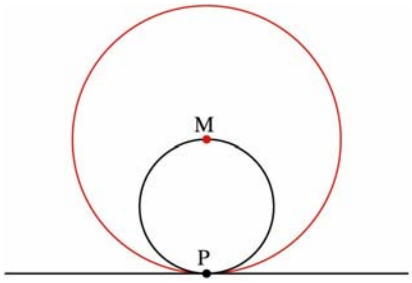
[2] Ungebildete

[3] Die Funktion ln(y) heißt natürlicher Logarithmus. Alle vernünftigen Taschenrechner können sie berechnen.

Ganz wie bei der gewöhnlichen Geradenspiegelung wird auch bei der abermaligen Ausführung der Kreisspiegelung der Bildpunkt auf den Ausgangspunkt zurückschickt: $s(s(P)) = P$.

e) (5 Punkte):
Kreisspiegelungen überführen Geraden in Geraden oder Kreise.

- Zeigt das für den rechts abgebildeten Spezialfall: Ein Kreis mit Durchmesser MP geht bei Spiegelung am Kreis mit Radius MP in die Tangente an P über.



Es ist bekannt, dass Kreisspiegelungen an (Halb-)Kreisen mit Mittelpunkt auf der Randgeraden Isometrien von H² sind (aber natürlich keine Isometrien von E²), insbesondere also Geodäten auf Geodäten abbilden. Benutzt diesen Fakt und Aufgabe 5 für das folgende Problem:

f) (5 Punkte):

- Was ist der Abstand in H² zwischen $P = (2;3)$ und $Q = (-2;5)$?

Allgemeine Anmerkungen
Wie ihr in Aufgabe 1 bereits entdeckt habt, kann man mit mehrfachen Geradenspiegelungen alle Isometrien von E² bekommen. Ähnliches gilt für die hyperbolische Ebene: alle Isometrien von H² kann man durch Ausführen geeigneter Kreisspiegelungen erhalten.
Die hier vorgestellten Geometrien, E², S² und H², sind speziell: E² ist flach, also ungekrümmt, während S² und H² konstante Krümmung aufweisen (wobei S² nach „innen" und H² nach „außen" gekrümmt ist). Es gibt natürlich auch viele weitere Gebilde mit nicht-konstanter Krümmung. Solche sogenannten Mannigfaltigkeiten werden unter anderen in der Differenzialgeometrie untersucht.
Gekrümmte Geometrie, darunter unsere nicht-Euklidischen Ebenen, sind nicht nur Teil einer schönen mathematischen Theorie. Sie kommen auch in der Physik vor, etwa bei der Untersuchung der Gravitation und in der allgemeinen Relavitätstheorie.
Außerdem sollte gesagt werden, dass Eschers Holzschnitt auf der ersten Seite anstelle der oberen Halbebene das Scheibenmodell von Henri Poincaré für H² benutzt. Die beiden Modelle sind gleichwertig. Könnt Ihr die Geodäten in Eschers Bild finden?

Viel Erfolg bei dieser dritten Aufgabe!

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 12. Dezember 2010, 23:59.

Gebt eure Lösungen über das Portal von uniKIK ab: http://www.unikik.de/portal/

Zulässige Dateiformate sind: PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern), sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen. (Denkt bitte an die Korrektoren/-innen und deren Rechner.)

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (Die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure angehängten Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Datein! Um sicher zu gehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei, und für die Korrektoren zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account runterladen und öffnen. Dateien die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Ihr könnt und solltet eure Lösung auch dann abgeben, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet, insbesondere die letzte Teilaufgabe (die Profi-Aufgabe) nicht gelöst habt! Vielleicht gelingt euch das ja bei der kommenden Aufgabe.
Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter: http://www.unikik.de/apollo13
Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.