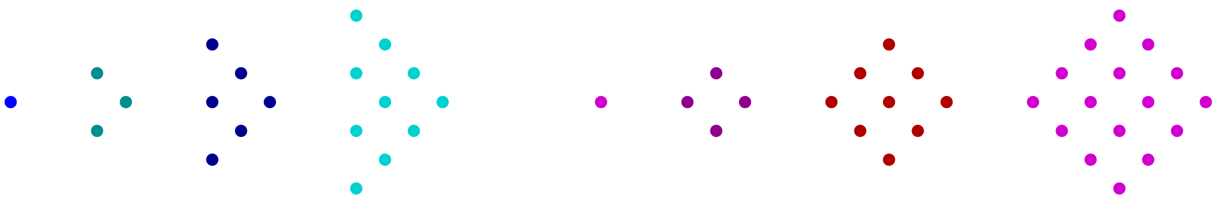
CLUB APOLLO 13, Aufgabe 3

Die Billionen des Bhaskara

Die dritte Aufgabe wird vom Institut für Algebraische Geometrie der Leibniz Universität Hannover gestellt.

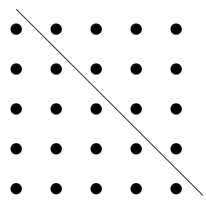
Weitere Informationen zum Studiengang der Mathematik findet ihr unter
http://www.math.uni-hannover.de/

Die Beschäftigung mit den Eigenschaften der ganzen Zahlen ist ein Zeitvertreib, dem die Menschen schon seit der Antike frönen. Die Gruppe um PYTHAGORAS etwa ist bis heute dafür bekannt. So untersuchten sie unter anderem die Dreiecks- und Quadratzahlen, von denen die ersten in der folgenden Abbildung gezeigt sind:



Aufgabe 1 (5 Punkte): Die ersten vier Dreieckszahlen sind $1, 3, 6, 10$ und die ersten vier Quadratzahlen sind $1, 4, 9, 16$. Wir fassen den einzelnen Punkt als Dreieck und Quadrat auf.

- Gebt alle zweistelligen Dreiecks- und Quadratzahlen an.
- Die n-te Quadratzahl ist n^2. Findet eine einfache Formel für die n-te Dreieckszahl.
- Die nebenstehende Abbildung stellt eine Beziehung zwischen Dreiecks- und Quadratzahlen dar. Welche?



Nun kann man sich fragen, welche Zahlen sowohl Dreiecks- als auch Quadratzahl sind. Im folgenden werden wir auch der Frage nachgehen, wie wir möglichst viele, oder sogar alle solche Zahlen finden können.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

- Findet eine Zahl größer als 1, die eine Quadratzahl und eine Dreieckszahl ist.
- Zeigt, dass "Quadratzahl = Dreieckszahl" auf eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - 8y^2 = 1$ führt. (Hinweis: quadratische Ergänzung der Dreieckszahl.)
- Welche Dreiecks- und Quadratzahl gehören zu einer Lösung x, y?

Um weitere Lösungen zu finden, werden wir mit Zahlen der Form $\alpha = x + y\sqrt{8}$ rechnen. Für zwei Zahlen α und β dieser Bauart sind Summe $\alpha + \beta$, Differenz $\alpha - \beta$ und Produkt $\alpha\beta$ auch von dieser Form. Die *Konjugierte* von $\alpha = x + y\sqrt{8}$ ist definiert als $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{8}$. Die *Norm* von α ist das Produkt $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$.
Im Weiteren werden x und y immer ganze Zahlen bezeichnen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigt, dass Lösungen unserer Aufgabe $x^2 - 8y^2 = 1$ durch Zahlen x, y mit $N(x + y\sqrt{8}) = 1$ beschrieben werden. Rechnet die Formel $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$ nach und benutzt sie, um drei weitere Zahlen mit Quadrat- und Dreiecksgestalt zu finden.

Unsere Methode war im Prinzip schon in der Antike bekannt. Man geht davon aus, dass der griechische Mathematiker Diophantus (etwa 200 n. Chr.) in ihrem Besitz war und für den indischen Mathematiker Brahmagupta (598–668 n. Chr.) ist dies gesichert. Die Idee, Summen von ganzen Zahlen mithilfe von Wurzeln in Produkte umzuwandeln, hatte dagegen erst Leonhard Euler im 18. Jahrhundert. Es ist inzwischen bekannt, dass alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 - 8y^2 = 1$ Potenzen der kleinsten Lösung sind.

Wir wenden uns jetzt einer ähnlichen Aufgabe zu, die der indische Mathematiker Bhaskara (1114–1185) löste. Es geht um die Gleichung $x^2 - 61y^2 = 1$. Bhaskara wählte dabei den Koeffizienten 61 sehr bewusst: Alle kleineren Faktoren führen zu wesentlich einfacheren Aufgaben mit deutlich kleineren Lösungen. Diese waren ihm sicher ebenfalls bekannt.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Schreibt ein Programm in einer Programmiersprache eurer Wahl, um eine andere Lösung als die offensichtliche $x = \pm 1$, $y = 0$ von $x^2 - 61y^2 = 1$ zu finden.
(Die kleinste "nicht-triviale" Lösung ist erstaunlich groß: Ein ungeschicktes Programm wird nicht in absehbarer Zeit fertig werden und der Datentyp für ganze Zahlen sollte 64 Bits haben.) Bitte gebt auch den Programm-Code mit ab.

Wir werden nun den Weg nachvollziehen, auf dem Bhaskara die Gleichung vor fast tausend Jahren auch ohne Computer lösen konnte. Eine zentrale Idee dabei ist, auch Lösungen der Gleichung $x^2 - 61y^2 = k$ anzuschauen, wobei k irgendeine ganze Zahl ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte):

- Es sei x, y eine Lösung der Gleichung $x^2 - 61y^2 = k$ und m eine beliebige positive Zahl. Rechnet die folgenden Gleichungen nach:

$$(mx + 61y)^2 - 61(ym + x)^2 = k(m^2 - 61) \tag{1}$$
$$(m^2 - 61)y^2 = k - (x^2 - m^2y^2) = k - (x + my)(x - my) \tag{2}$$
$$mx + 61y = m(x + my) - (m^2 - 61)y \tag{3}$$

  Könnt Ihr diese Formeln ähnlich wie in Aufgabe 3 mit Normen umschreiben?
- Wenn außerdem k und y teilerfremd sind und $ym + x$ ein Vielfaches von k ist, zeigt, dass dann $m^2 - 61$ und $mx + 61y$ ebenfalls Vielfache von k sein müssen.

Die folgende Aufgabe beschreibt nun ein Verfahren, um sich von einer Lösung unser Gleichung zu einer anderen Lösung zu hangeln, wobei sich k in jedem Schritt verändert. Bhaskara musste hoffen, dass dabei irgendwann auch $k = 1$ auftaucht, mittlerweile ist dies bewiesen. Man kann den Algorithmus als reine Rechenvorschrift auffassen, aber Aufgabe 5 gewährleistet, dass jeder Schritt funktioniert. Könnt ihr erkennen, warum (ohne Bewertung)?

Aufgabe 6 (5 Punkte):

- Findet eine Lösung von $x^2 - 61y^2 = 3$ und folgert daraus die Gleichung

$$\left(\frac{8m+61}{3}\right)^2 - 61\left(\frac{m+8}{3}\right)^2 = \frac{m^2-61}{3}.$$

  Wählt m so, dass $m+8$ durch 3 teilbar ist und der Betrag $\left|\frac{m^2-61}{3}\right|$ so klein wie möglich wird.
- Der vorige Schritt führt auf die Gleichung $39^2 - 61 \cdot 5^2 = -4$. Folgert daraus

$$\left(\frac{39m+305}{-4}\right)^2 - 61\left(\frac{5m+39}{-4}\right)^2 = \frac{m^2-61}{-4}.$$

  Wählt m diesmal so, dass $5m+39$ durch 4 teilbar ist und $\left|\frac{m^2-61}{-4}\right|$ so klein wie möglich wird.
- Setzt das Verfahren so lange fort, bis $k = 1$ auftritt. Das ist Bhaskaras Lösung! (Die Rechnung ist etwas länger. Ihr könnt jedoch durch Einsetzen eurer Zahlen jederzeit testen, ob ihr noch auf dem richtigen Weg seid. Die Zahlen könnten das Fassungsvermögen mancher Taschenrechner sprengen; nehmt dann den Taschenrechner auf einem Computer.
  Schreibt für die Lösung nur die Zahlen m und k jedes Schrittes auf.)

Bhaskaras Aufgabe und Lösung blieben in Europa lange Zeit unbekannt. Hier wurde die Aufgabe zuerst im Jahr 1657 durch den Franzosen Pierre de Fermat gestellt. Fermat kannte also wohl auch ein Lösungsverfahren und konnte den "schwierigen" Koeffizienten 61 finden. Die erste veröffentlichte europäische Lösung erschien 1732 von Euler.
Die Mathematik gilt als reinste und weltabgewandeste unter den Wissenschaften. Innerhalb der Mathematik nahm die Zahlentheorie sehr lange diese Position ein. Mittlerweile haben aber sehr viele zahlentheoretische Ergebnisse Anwendungen gefunden, vornehmlich durch Kodierungsverfahren und Kryptographie. Wer mehr über die hier vorgestellten Probleme wissen möchte, wird in den folgenden Büchern fündig:

Harold Davenport: *The Higher Arithmetic* (Cambridge University Press)
Alexander Schmidt: *Einführung in die algebraische Zahlentheorie* (Springer-Verlag)

Das Buch von Schmidt ist eine Einführung in die Zahlentheorie auf Universitätsniveau. Die ersten Kapitel können mit den Kenntnissen aus dem Mathematikunterricht der Schule gelesen werden; einige Abschnitte, die mehr voraussetzen, könnt ihr getrost ignorieren. Davenports Buch dagegen ist leichter zugänglich und nimmt den Leser fester an die Hand. Es ist allerdings nur in englischer Sprache erschienen. In beiden Büchern kann man unter dem Schlagwort "Pellsche Gleichung" etwas zum Thema dieser Übungsserie finden.

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 18. Dezember 2011, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über das Portal von uniKIK ab:
Zulässige Dateiformate sind: PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern), sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen. (Denkt bitte an die Korrektoren/-innen und deren Rechner.) Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (Die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure angehängten Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Datein! Um sicher zu gehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei, und für die Korrektoren zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account runterladen und öffnen. Dateien die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!
Ihr könnt und solltet eure Lösung auch dann abgeben, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet, insbesondere die letzte Teilaufgabe nicht gelöst habt! Vielleicht gelingt euch das ja bei den kommenden Aufgaben.
Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter:
http://www.unikik.de/apollo13
Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.