Lösungen zu Aufgabe 3 — Mathematik

David Ploog, Frithjof Schulze

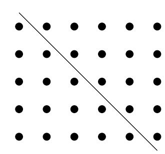
Aufgabe 1. Die Dreieckszahlen kleiner als 100 sind

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91.$$

Diese Zahlen folgen der Vorschrift $d_n = d_{n-1}+n$, wobei d_n die n-te Dreieckszahl bezeichnet.
Die Quadratzahlen bis 100 sind

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.$$

Hierbei ist die n-te Quadratzahl gegeben durch $q_n = n^2$.
Eine geschlossene Formel für die Dreieckszahlen ist $d_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Man kann diese Formel wie im nebenstehende Bild sehen, indem man zwei n-te Dreiecke so zusammen fügt, dass sie ein $n\times(n+1)$-Rechteck bilden.



Die Skizze in der Aufgabe illustriert die Gleichung $d_{n-1}+d_n = q_n$.

Aufgabe 2. Wir haben bereits alle zweistelligen Dreiecks- und Quadratzahlen berechnet. Außer der 1 ist 36 die einzige Zahl, die in beiden Listen vorkommt. Damit ist 36 also die einzige zweistellige Zahl, die Dreieckszahl und Quadratzahlen gleichzeitig ist.
Wir können die Forderung, das eine Zahl N gleichzeitig Dreieckszahl und Quadratzahlen ist schreiben als $N = d_n = q_m$, für gewisse natürliche Zahlen n und m. Mit den Formel oben gibt das

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2.$$

Diese Gleichung können wir umformen (quadratisches Ergänzen) zu

$$\begin{aligned} n^2+n &= 2m^2 \\ n^2+n+\frac{1}{4} &= 2m^2+\frac{1}{4} \\ (n+\frac{1}{2})^2 &= 2m^2+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit 4, um alle Nenner loszuwerden und erhalten

$$(2n+1)^2 = 8m^2+1,$$

also

$$(2n+1)^2-8m^2 = 1.$$

Wir führen neue Variablen $x = 2n+1$ und $y = m$ ein und erhalten die Gleichung

$$x^2-8y^2 = 1.$$

Zu einer Lösung (x, y) dieser Gleichung gehören dann die $(x-1)/2$-te Dreieckszahl und die y-te Quadratzahl und diese beiden Zahlen sind gleich.

Aufgabe 3. Die Gleichung

$$\mathrm{N}(x+y\sqrt{8}) = (x+y\sqrt{8})(x-y\sqrt{8}) = x^2-8y^2$$

zeigt, dass Zahlen x, y mit $\mathrm{N}(x+y\sqrt{8}) = 1$ unsere Gleichung lösen.
Wir schreiben $\alpha = x+y\sqrt{8}$ und $\beta = z+w\sqrt{8}$. Die Gleichung $\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta) = \mathrm{N}(\alpha\beta)$ folgt dann aus den beiden Gleichungsketten

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\alpha\beta) &= \mathrm{N}((x+y\sqrt{8})(z+w\sqrt{8})) \\
&= \mathrm{N}(xz+8yw+\sqrt{8}(xw+yz)) \\
&= (xz+8yw)^2-8(xw+yz)^2 \\
&= x^2z^2+16xyzw+64y^2w^2-8x^2w^2-8y^2z^2-16xyzw \\
&= x^2z^2+64y^2w^2-8(x^2w^2+y^2z^2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta) &= \mathrm{N}(x+y\sqrt{8})(z+w\sqrt{8}) \\
&= (x^2-8y^2)(z^2-8w^2) \\
&= x^2z^2+64y^2w^2-8(x^2z^2+y^2w^2)
\end{aligned}$$

Mit der Gleichung $\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta) = \mathrm{N}(\alpha\beta)$ können wir nun Zahlen finden, die sowohl Dreiecks- als auch Quadratzahlen sind, indem wir α und β aus der bereits bekannten Lösung 36 nehmen. In einem gewissen Sinne berechnen wir also Potenzen der (fundamentalen) Lösung 36. Wir nehmen somit $n = 8$, $m = 6$ und $\alpha = \beta = 17+6\sqrt{8}$. Dieses Verfahren liefert wir die folgenden Dreiecks- und Quadratzahlen:

$\alpha\ = 17+6\sqrt{8}$,	$n = 8$,	$m = 6$,	$d_n = q_m = 36$
$\alpha^2 = 577+204\sqrt{8}$,	$n = 288$,	$m = 204$,	$d_n = q_m = 41616$
$\alpha^3 = 19601+6930\sqrt{8}$,	$n = 9800$,	$m = 6930$,	$d_n = q_m = 48024900$
$\alpha^4 = 665857+235416\sqrt{8}$,	$n = 332928$,	$m = 235416$,	$d_n = q_m = 55420693056$

Aufgabe 4. Die kleinste nichttriviale Lösung ist so groß, dass es nicht möglich ist, alle Werte für x und y in einer Doppelschleife zu testen.
Eine recht naive, aber für unsere Zwecke genügend schnelle Möglichkeit, eine Lösung mit "roher Gewalt" zu finden ist die Gleichung in einer Schleife für gegebene x-Werte numerisch nach y zu lösen und jeweils zu testen, ob die gerundete Lösung y zusammen mit dem Wert für x eine Lösung der Gleichung ist.

Eine einfache kleine Optimierung ist bei Schleifenbeginn solche Werte für x auszusortieren, für die x^2-1 nicht durch 61 teilbar ist. Ist dies nicht der Fall, so kann man sich das "teure" Wurzelziehen sparen.

Python

Das Programm ist einfach gehalten, aber der Test `x*x - 1 % 61 == 0` verbessert die Laufzeit deutlich.

```
from math import sqrt
def pell():
    x = 2
    while True:
        x += 1
        tmp = x*x - 1
        if tmp % 61 != 0:
            continue
        y = long(sqrt(tmp/61))
        if tmp - 61*y*y == 0:
            print x, y
            return
    return
if __name__ == '__main__':
    pell()
```

C

Hier ein Programm in C, optimiert für effizienten Code.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
void main()
{
  unsigned long x, y, tmp, q, r;

  x = 1;
  tmp = x*x - 1;

  while (1) {
    tmp += 2*x + 1;
    x += 1;
    q = tmp / 61;
    r = tmp - 61*q;

    if (r == 0) {
      y = (unsigned long)sqrt((double)q);
      if (tmp - 61*y*y == 0) {
        printf("%ld, %ld\n", x, y);
        return;
      }
    }
  }
  return;
}
```

Aufgabe 5. Die erste Gleichung müssen wir einfach nachrechnen und dabei am Ende $x^2-61y^2 = k$ einsetzen:

$$\begin{aligned}(mx+61y)^2-61(ym+x)^2 &= m^2x^2+2\cdot 61mxy+61^2y^2-61(y^2m^2+2mxy+x^2)\\ &= m^2x^2+61^2y^2-61(y^2m^2+x^2)\\ &= m^2x^2+61^2y^2-61y^2m^2-61x^2\\ &= m^2k+61(61y^2-x^2)\\ &= m^2k-61k = k(m^2-61).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung erhalten wir, indem wir sie anders herum aufschreiben und $x^2-61y^2 = k$ in der Form $k-x^2 = 61y^2$ benutzen:

$$\begin{aligned}k-(x+my)(x-my) &= k-(x^2-m^2y^2)\\ &= m^2y^2+(k-x^2)\\ &= m^2y^2-61y^2 = (m^2-61)y^2.\end{aligned}$$

Die letze Gleichung ist erhalten wir indem wir mit der rechten Seite der Gleichung starten und den Term m^2y addieren und wieder abziehen:

$$\begin{aligned}mx+61y &= mx+m^2y-m^2y+61y\\ &= (mx+m^2y)-(m^2y-61y) = m(x+my)-(m^2-61)y.\end{aligned}$$

Für die Teilbarkeitseigenschaften hatten wir folgende Voraussetzungen: die Zahlen k und y sind teilerfremd und $ym+x = Ak$ für eine ganze Zahl A. Außerdem gilt immer noch $x^2-61^2 = k$, weswegen wir (2) benutzen können:

$$(m^2-61)y^2 = k-(x+my)(x-my) = k-Ak(x-my) = k(1-A(x-my)).$$

Weil k und y teilerfremd sind, ist das auch für k und y^2 der Fall. Da k nun das Produkt $(m^2-61)y^2$ teilt, muss k also ein Teiler des Faktors m^2-61 sein. Schreiben wir $m^2-61 = Bk$ mit einer ganzen Zahl B und setzen dies in (3) ein, so folgt

$$mx+61y = m(x+my)-(m^2-61)y = mAk-Bky = k(Am-By).$$

Aufgabe 6. Eine Lösung von $x^2-61y^2 = 3$ ist $x = 8$, $y = 1$. Setzen wir diese Zahlen in Formel (1) aus Aufgabe 5 ein und teilen durch $k = 3$, so erhalten wir die in der Aufgabe angegebene Gleichung.
Wenn wir m so wählen, dass 3 ein Teiler von $m+8$ ist, dann sind nach Aufgabe 5 alle drei Brüche ganze Zahlen. Außerdem wollen wir $(m^2-61)/3$ (was der k-Wert im nächsten Schritt sein wird) dem Betrage nach minimieren, um die Rechnung so einfach wie möglich zu halten. Wir tragen nun m und $|m^2-61|$ in einer Tabelle auf, wobei die Spalten hervorgehoben sind, für die $m+8$ durch 3 teilbar ist:

m	**1**	2	3	**4**	5	6	**7**	8	9	**10**
$m+8$	**9**	10	11	**12**	13	14	**15**	16	17	**18**
m^2	**1**	4	9	**16**	25	36	**49**	64	81	**100**
$\|m^2-61\|$	**60**	57	52	**45**	36	25	**12**	3	20	**39**

Somit ist $m = 7$ die gesuchte Lösung in diesem Schritt und wir erhalten $39^2-61\cdot5^2 = -4$, also $x = 39$, $y = 5$, $k = -4$. Mit der Prozedur wie eben erhalten wir die im zweiten Punkt von Aufgabe 6 gegebene Formel. Hier muss $5m+39$ durch 4 teilbar sein, also m von der Form $4M+1$ für eine natürliche Zahl M. Wir tabulieren diesmal etwas effektiver:

m	1	5	9	13
$\|m^2-61\|$	60	36	20	108

Wir finden den kleinsten Betrag für $m = 9$. Die neue Gleichung ist $164^2-61\cdot21^2 = -5$, also $x = 164$, $y = 21$, $k = -5$. Setzen wir dies in (1) aus Aufgabe 5 ein, so muss $21m+164$ durch 5 teilbar sein, also m von der Form $5M+1$. Der Betrag $|m^2-61|$ wird minimiert für $m = 6$.

Führen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir immer weitere Gleichungen dieser Gestalt. Wir geben hier für die restlichen Schritte nur die Werte von x, y, m und k an:

Schritt	x	y	m	k
1	8	1	7	3
2	39	5	9	-4
3	164	21	6	-5
4	452	58	9	5
5	1523	195	7	4
6	5639	722	8	-3
7	29718	3805	8	-1
8	469849	60158	7	-3
9	2319527	296985	9	4
10	9747957	1248098	6	5
11	26924344	3447309	9	-5
12	90520989	11590025	7	-4
13	335159612	42912791	8	3
14	1766319049	226153980	–	1