Schiefturmbau

Der hier abgebildete schiefe Turm von Pisa ist weltberühmt. Mit seinem Bau wurde 1173 begonnen und der Turm muss abgestützt werden, damit er nicht umfällt. Bei einer Höhe von 55 Metern, einem Durchmesser von 12 Metern und einer Neigung von 4° beträgt der Überhang allerdings nur 3,8 Meter. In dieser Aufgabenreihe werden wir lernen, wie man beliebig weit ausladende Türme bauen kann, die viel stabiler sind!
Dafür müssen wir uns mit einer divergenten Reihe und mit Schwerpunkten beschäftigen.

Eine *Reihe* ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Um solche Summen gut aufschreiben zu können, benutzt man eine spezielle Notation. Wir schreiben zum Beispiel

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

für die Summe über die Brüche $\frac{1}{n}$, wobei n die ganzen Zahlen von 1 bis N durchlaufen soll. Also

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}.$$

Für eine Summe mit unendlich vielen Summanden schreiben wir dann ein ∞ für die obere Grenze N, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.$$

Eine solche Reihe kann tatsächlich *konvergieren*, also einen endlichen Wert annehmen, wenn die Summanden genügend klein werden (wir werden hier nur positive Summanden betrachten). Bekannte Beispiele für konvergente Reihen sind

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = e = 2,718\ldots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 1: Was ist der Wert der folgenden *endlichen* Summe in Abhängigkeit von N?

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^N}.$$

Aufgabe 2: Was ist der Wert der folgenden *unendlichen* Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots .$$

Begründet euer Ergebnisse in beiden Aufgaben!

Es kann aber passieren, dass eine Reihe *divergiert*, also keinen endlichen Wert annimmt, obwohl die Summanden beliebig klein werden:

Aufgabe 3: Berechnet die folgenden endlichen Summen

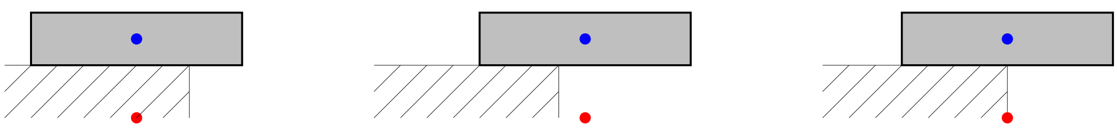
$$\sum_{n=3}^{4} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=5}^{8} \frac{1}{n} \quad , \sum_{n=9}^{16} \frac{1}{n}.$$

und zeigt, dass die endlichen Summen (also die Summen mit einer endlichen Zahl N statt ∞) der Reihe

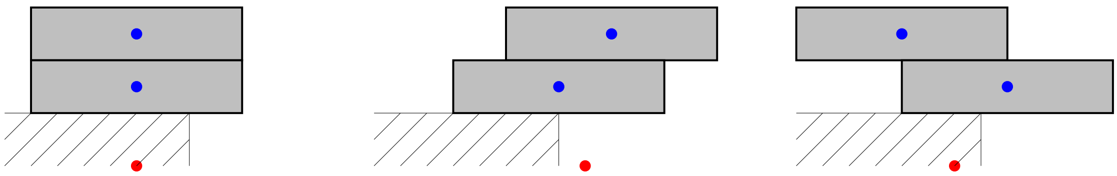
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

beliebig groß werden können.

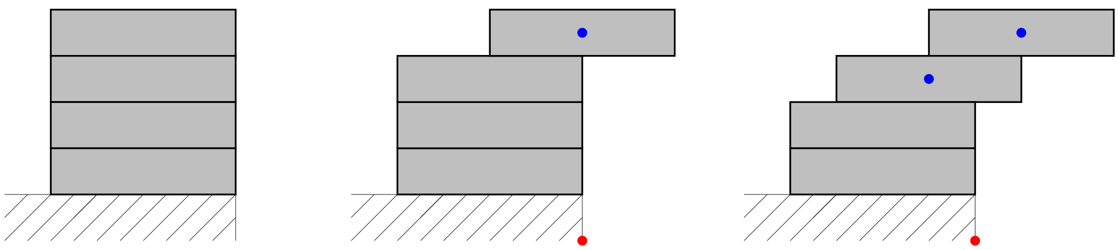
Der Einfachheit halber werden wir alle unsere Türme aus identischen Quadern konstruieren. Die Quader sollen auch homogen sein, so dass der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt übereinstimmt. In den Bildern zeigen wir immer einen Querschnitt. Der Stein fällt im folgenden Bild herunter, wenn sein Schwerpunkt über den Rand hinausragt. Liegt der Schwerpunkt genau auf dem Rand, fällt der Stein nicht; allerdings ist dieses Gleichgewicht sehr fragil. Für uns ist daher immer nur die horizontale Koordinate des Schwerpunktes interessant.



Bei zwei oder mehr Steinen ist der Schwerpunkt der Konfiguration der Mittelwert aller Schwerpunkt der einzelnen Steine:



Wir gehen jetzt zum Turmbau über. Dafür starten wir mit einem sehr hohen Stapel an Bausteinen, die alle an der Kante ausgerichtet sind. Nun schieben wir den obersten Stein so weit nach außen, dass der Schwerpunkt genau auf dem Rand liegt — also im Gleichgewicht. Anschließend schieben wir die beiden obersten Steine so weit nach außen wie möglich.

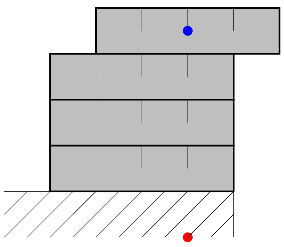


Aufgabe 4: Bestimmt den mit dieser Konstruktion erreichten Überhang, wenn N Steine benutzt werden.

Aufgabe 5:
a) Mit wie vielen Steinen ist der so erzielte Überhang erstmals größer als eine Quaderlänge? Welche Höhe braucht man für zwei Quaderlängen?
b) Zeigt, dass der so entstehende schiefe Turm beliebig weit ausladen kann!

Der in den Aufgaben oben gebaute Turm wächst schnellstmöglich zur Seite, allerdings auf Kosten der Stabilität: ein Windhauch aus der Gegenrichtung würde den Turm umwerfen. Das wollen wir nicht, und darum verlegen wir den Schwerpunkt des ganzen Turmes ein Stück in die Mitte.

Aufgabe 6: Beschreibt, wie schnell der Überhang wächst, wenn der Turm wie vorher gebaut wird, aber jetzt der Schwerpunkt eine Viertel Steinlänge vom Rand entfernt sein soll. Kann der Turm immer noch beliebig weit ausladen?



Unendliche Reihen gehören zum mathematischen Gebiet der Analysis und wurden bereits von Newton als Werkzeug zum Lösen seiner physikalischen Probleme benutzt. Sie sind noch immer von großer Bedeutung und werden in den meisten technischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen im ersten Semester gelehrt.

Wir schließen mit einer Knobelaufgabe außer Konkurrenz: Wenn zwei Steine in jeder Schicht benutzt werden können, welchen maximalen Aushang könnt ihr dann mit fünf Schichten erzielen? Der Einfachheit halber sollen alle Steine nur bis auf Viertellängen verschoben werden, wie im Bild. Der Schwerpunkt darf auf der Kante liegen.