Klausur (Diskrete Mathematik I) — Lösungen

Aufgabe 1. (*4 Punkte*) Bei einer Tanzveranstaltung treffen sich sechs Damen und sechs Herren. Zu Beginn werden die Gläser erhoben und jede Person stößt mit jeder der elf anderen an. Danach bilden die Teilnehmer Paare (Dame/Herr) und der Tanz beginnt.

Wie oft erklingen die Gläser?

Auf wie viele Weisen kann man sechs Paare bilden?

Lösung: Jede Personen stößt mit den elf anderen an, es klingt also $12 \cdot 11/2 = \binom{12}{2} = 66$ mal. Wenn wir die Damen mit $1, 2, \ldots, 6$ durchnummerieren, dann ist eine Partnerwahl genau eine Permutation der sechs Herren. Dafür gibt es $6! = 720$ Möglichkeiten.

Aufgabe 2. (*4 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen für die folgenden Werte existieren:

$e = 5,\ k = 6,\ f = 3$	ja	**nein**	$e = 6,\ k = 9,\ f = 5$	**ja**	nein
$e = 6,\ k = 10,\ f = 6$	**ja**	nein	$e = 8,\ k = 9,\ f = 7$	ja	**nein**

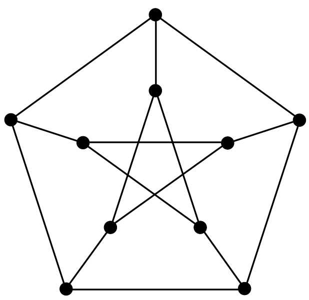
Lösung: $e = 5,\ k = 6,\ f = 3$: Nein, denn es gibt kein Polyeder mit nur drei Flächen.
$e = 6,\ k = 10,\ f = 6$: Ja, die Pyramide über einem Fünfeck.
$e = 6,\ k = 9,\ f = 5$: Ja, das Dreikantprisma.
$e = 8,\ k = 9,\ f = 7$: Nein, denn die Polyederformel ist verletzt: $e + f - k = 6 \neq 2$.

Aufgabe 3. (*4 Punkte*) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Implikationen für einen endlichen Graphen G zutreffen:

G Baum $\Longrightarrow$ G bipartit	**ja**	nein	$\chi(G) = 2 \Longrightarrow G$ planar	ja	**nein**
G 2-regulär $\Longrightarrow$ G bipartit	ja	**nein**	G planar $\Longrightarrow \chi(G) \leq 6$	**ja**	nein

Lösung: Bipartite Graphen haben keine ungeraden Zykel, Bäume haben gar keine Zykel.
$K_{3,3}$ ist bipartit (hat also $\chi(K_{3,3}) = 2$), aber nicht planar.
$Z_3 = K_3$ ist 2-regulär, aber nicht bipartit.
Farbensatz: G planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$ (sogar $\chi(G) \leq 4$), insbesondere also $\chi(G) \leq 6$.

Aufgabe 4. (*4 Punkte*) Der nebenstehende Graph P heißt *Petersen-Graph*. Beantworten Sie die folgenden Fragen zum Petersen-Graphen:



Ist P bipartit?	ja	**nein**
Ist P regulär?	**ja**	nein
Ist P planar?	ja	**nein**
Was ist die Farbzahl $\chi(P)$ von P?		

Lösung: P ist nicht bipartit, denn P enthält ungerade Zykel. P ist 3-regulär. P ist nicht planar. $\chi(P) = 3$, denn P ist nicht bipartit (also $\chi(P) > 2$, etwa mit Aufgabe 8). Es ist leicht, eine 3-Färbung der Ecken von P anzugeben.

Aufgabe 5. (*4 Punkte*) Beweisen Sie die folgende Formel für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \qquad \text{wobei } 1 \le k \le m \le n.$$

Lösung: Es gibt verschiedene Beweise.
Beweis mit Fakultäten:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \iff \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}$$

und auf der rechten Seite kürzen sich alle Faktoren weg.
Beweis mit fallenden Faktoriellen:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \iff \frac{n^{\underline{m}}}{m!} \cdot \frac{m^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{(n-k)^{\underline{(m-k)}}}{(m-k)!}$$

und die Aussage auf der rechten Seite ist wahr: $n^{\underline{k}} \cdot (n-k)^{\underline{(m-k)}} = n^{\underline{m}}$ und $m^{\underline{k}}(m-k)! = m!$.
Kominatorischer Beweis: Das Produkt der Binomialkoeffizienten auf der linken Seite zählt alle Möglichkeiten, erst m aus n zu wählen und dann k aus den m. Auf der rechten Seite erreichen wir die gleichen Auswahlen auf andere Weise: zuerst werden k aus n gewählt, und dann die k zu m ergänzt, indem aus den $n-k$ restlichen Objekten noch $m-k$ gezogen werden.

Aufgabe 6. (*8 Punkte*) Geben Sie Formeln für die die Wahrscheinlichkeiten an, beim Ziehen von sechs Karten eines Standardkartenspieles (52 Karten in den vier Farben $\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$ und den 13 Werten 2,3,4,5,6,7,8,9,10,B,D,K,A) die folgenden Blätter zu ziehen:

(a) Alle Karten haben die gleiche Farbe.
(b) Alle Werte sind verschieden.
(c) Zwei Drillinge (etwa 2,2,2,7,7,7).
(d) Es kommen nur zwei verschiedene Werte vor.

Lösung: Der Nenner ist in allen vier Fällen $\binom{52}{6}$, denn das ist die Anzahl der Möglichkeiten, sechs Karten (ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge) aus dem Stapel von 52 zu ziehen. Wir müssen also nur noch die jeweils günstigen Ereignisse abzählen.

$$\frac{4\binom{13}{6}}{\binom{52}{6}}, \quad \frac{\binom{13}{6}4^6}{\binom{52}{6}} = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36 \cdot 32/6!}{\binom{52}{6}}, \quad \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{3}}{\binom{52}{6}} = \frac{\binom{13}{2}4^2}{\binom{52}{6}}, \quad \frac{\binom{13}{2}4^2 + 13 \cdot 12\binom{4}{2}}{\binom{52}{6}}$$

(a): Wahl einer der vier Farben, dann Wahl von 6 Karten mit der Farbe.
(b): Auswahl von sechs Werten, dann Wahl einer beliebigen Farbe für jede Karte.
(c): Wahl von zwei Werten, danach Wahl von jeweils drei Karten mit dem Wert.
(d): Es gibt nur die Möglichkeit Doppeldrilling, also (c), und Vierling+Paar. Bei Vierling+Paar wählen wir eine Farbe für den Vierling, danach eine der restlichen 12 Farben für das Paar und anschließend zwei Farben für das Paar.

Aufgabe 7. (*4 Punkte*) In zwei Beuteln seien Karten, einmal drei Karten mit den Werten 1,2,4 und dann vier Karten mit den Werten 1,2,3,4. Wir ziehen aus jedem Beutel eine Karte und bilden das Produkt. Berechnen Sie den Erwartungswert für diesen Versuch.

Lösung: Die möglichen Ergebnisse sind alle auftretenden Produkte (1,2,3,4,6,8,12,16), aber sie sind nicht gleichverteilt. Wir zählen, wie oft jedes Produkt vorkommt:

$$\begin{array}{lllllllllll} 1: & 1 & (1\cdot 1) & \quad 2: & 2 & (2\cdot 1, 1\cdot 2) & \quad 3: & 1 & (1\cdot 3) & \quad 4: & 3 \ (1\cdot 4, 2\cdot 2, 4\cdot 1) \\ 6: & 1 & (2\cdot 3) & \quad 8: & 2 & (2\cdot 4, 4\cdot 2) & \quad 12: & 1 & (4\cdot 3) & \quad 16: & 1 \ (4\cdot 4) \end{array}$$

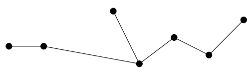
Der Erwartungswert ist die gewichtete Summe

$$\begin{aligned} E(\text{Produkt}) &= \frac{1\cdot 1}{12} + \frac{2\cdot 2}{12} + \frac{3\cdot 1}{12} + \frac{4\cdot 3}{12} + \frac{6\cdot 1}{12} + \frac{8\cdot 2}{12} + \frac{12\cdot 1}{12} + \frac{16\cdot 1}{12} \\ &= \frac{1+4+3+12+6+16+12+16}{12} = \frac{70}{12} = 5\tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (*4 Punkte*) Zeigen Sie, dass ein Graph G mit mindestens einer Kante Farbzahl 2 hat genau dann, wenn G bipartit ist.

Lösung: ($\Rightarrow$) Sei G mit $|K(G)| \geq 1$ und $\chi(G) = 2$. Wir wählen eine Eckenfärbung mit zwei Farben, so dass benachbarte Ecken verschiedene Farben bekommen (möglich wegen $\chi(G) = 2$); beide Farben treten auf wegen $|K(G)| \geq 1$. Als bipartite Zerlegung $E(G) = E_1 \cup E_2$ der Eckenmenge wählen wir die Ecken mit fester Farbe. Nach Konstruktion der Färbung gibt es keine Kanten innerhalb von E_1 und innerhalb von E_2.
($\Leftarrow$) Als bipartiter Graph hat G eine disjunkte Eckenzerlegung $E(G) = E_1 \cup E_2$, wobei es nur Katen zwischen E_1 und E_2 gibt. Wenn wir die Ecken aus E_1 in einer Farbe und die Ecken aus E_2 in einer anderen Farbe färben, zeigt das $\chi(G) \leq 2$. Weil der Graph mindestens eine Kante besitzt, ist $\chi(G) = 1$ unmöglich.

Aufgabe 9. (*4 Punkte*) Geben Sie einen endlichen Graphen G mit mindestens zwei Ecken an, der nur den trivialen Automorphismus besitzt. Begründen Sie Ihre Konstruktion. (Ein Graphautomorphismus ist ein Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} G$. Die identische Abbildung ist immer ein Automorphismus, der „triviale Automorphismus".)

Lösung: Eine einfache Lösung ist ein Baum mit 7 Ecken. 
Hier gibt es keine nichttrivialen Automorphismen, weil jeder Automorphism Eckengrade erhalten muss und somit der zentrale Knoten (Grad 3) erhalten wird, damit aber auch die Arme, da sie paarweise verschiedene Länge haben.

Die kleinstmögliche Anzahl an Ecken ist 6. Im nebenstehenden Beispiel gibt es keine nicht-trivialen Automorphismen, weil die Eckengrade am Dreieck 1,2,2 sind — jeder Automorphismus muss das Dreieck mit seinen Graden erhalten. Außerdem hängen an den beiden Ecken vom Grad 2 Ketten verschiedener Länge.