Klausur (Diskrete Mathematik II) — Lösungen

Aufgabe 1. (*10 Punkte*) Geben Sie eine Formel für die folgende Summe an, mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ (Ihre Formel soll idealerweise Potenzen enthalten):

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^4 + 2i^3 + 2i^2 - 2i.$$

Lösung: Die Summation ist einfach für die fallenden Faktoriellen $x^{\underline{k}}$, für die $\sum x^{\underline{k}} = \frac{1}{k+1} x^{\underline{k+1}}$ gilt. Man kann die Potenzen x^k von Hand durch die Faktoriellen $x^{\underline{k}}$ darstellen oder dies systematisch mit Hilfe der Stirlingzahlen 1. Art tun: $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, x^{\underline{k}}$. In jedem Fall wird

$$x^1 = x^{\underline{1}}, \quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \quad x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \quad x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Die diskrete Stammfunktion von

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x \\ &= (x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x) + (2x^{\underline{3}} + 6x^{\underline{2}} + 2x) + (2x^{\underline{2}} + 2x) - 2x \\ &= x^{\underline{4}} + 8x^{\underline{3}} + 15x^{\underline{2}} + 3x \end{aligned}$$

ist somit

$$\sum f(x) = \frac{1}{5}x^{\underline{5}} + \frac{8}{4}x^{\underline{4}} + \frac{15}{3}x^{\underline{3}} + \frac{3}{2}x^{\underline{2}}$$

und mit den Stirling-Zahlen 2. Art (Basiswechsel von fallenden Faktoriellen zu Potenzen)

$$x^{\underline{5}} = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, \quad x^{\underline{4}} = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x, \quad x^{\underline{3}} = x^3 - 3x^2 + x, \quad x^{\underline{2}} = x^2 - x$$

wird $\sum f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{10}x$. Weil die obere Summengrenze in der Aufgabe $n-1$ war, ist

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^4 + 2i^3 + 2i^2 - 2i = \frac{1}{5}n^5 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{10}n.$$

Aufgabe 2. (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, 4620 als Produkt von drei Faktoren (ungleich 1 und der Größe nach geordnet) zu schreiben, d.h.

$$4620 = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \qquad \text{mit } m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < m_1 \le m_2 \le m_3.$$

Lösung: Die Primfaktorzerlegung ist $4620 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ und eine Produktdarstellung mit drei Faktoren (ungleich 1) entspricht einer Partition der Menge $\{2_1, 2_2, 3, 5, 7, 11\}$ in drei (nicht-leere) Teilmengen. Es gibt $S_{6,3}$ (Stirling-Zahl 1. Art) solcher Partitionen; diese Zahl lässt sich mit der Rekursionsformel für Stirling-Zahlen schnell berechnen:

	$k=1$	2	3	4	
$n=1$	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1
6	1	31	**90**	…	

Weil aber die Partitionen $\{2_1\}, \{2_2\}, \{3, 5, 7, 11\}$ und $\{2_2\}, \{2_1\}, \{3, 5, 7, 11\}$ dieselbe Faktorisierung ergeben, lässt sich 4620 insgesamt auf $90 - 1 = 89$ Weisen als Produkt mit drei Faktoren schreiben.

Aufgabe 3. (*10 Punkte*) Berechnen Sie eine Formel für die rekursiv definierten Folgenglieder (a_n) mit $a_0 = 0$ und $a_n = 2a_{n-1} + n$ für $n > 0$.

Lösung: Mit $A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ist

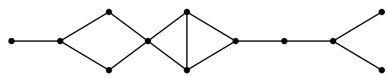
$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(2a_{n-1} + n)x^n = 2x \sum_{n>0} a_{n-1}x^{n-1} + x \sum_{n>0} nx^{n-1} \\ &= 2x \cdot A(x) + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

also mit Umstellen und Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x\left(\frac{4}{1-2x} + \frac{2x-3}{(1-x)^2}\right) \\ &= 4x\sum_{n\geq 0} 2^n x^n + 2\sum_{n\geq 0} nx^{n+1} - 3\sum_{n>0} nx^n = 4x\sum_{n\geq 0} 2^n x^n + 2\sum_{n\geq 0}(n-1)x^n - 3\sum_{n>0} nx^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(2^{n+1} - n - 2)x^n \end{aligned}$$

und somit $a_n = 2^{n+1} - n - 2$, passend zu den Anfangsgliedern $0, 1, 4, 11, 26, \ldots$

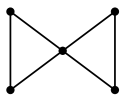
Aufgabe 4. (*4 Punkte*) Begründen Sie folgende Aussagen über den Graphen G:



1) G hat wenigstens neun verschiedene Eigenwerte.
2) Für den Spektralradius (Perron-Frobenius-Eigenwert) $\lambda_0(G)$ gilt $2 < \lambda_0(G) \leq 4$.

Lösung: 1) Der Graph G hat Durchmesser $\mathrm{diam}(G) = 8$ und nach einem Satz aus der Vorlesung hat G mindestens $1 + \mathrm{diam}(G) = 9$ verschiedene Eigenwerte.
2) In der Vorlesung wurden die Graphen mit Spektralradius ≤ 2 klassifiziert; es waren die (erweiterten) Dynkin-Diagramme. G ist nicht darunter, also muss der Spektralradius $\lambda_0(G) > 2$ sein. Außerdem hat G Maximalgrad 4, also ist nach Aufgabe 6 auch $\lambda_0(G) \leq 4$.

Aufgabe 5. (*12 Punkte*) Berechnen Sie das Spektrum des folgenden Graphen und einen positiven Eigenvektor:



Lösung: Das charakteristische Polynom ist $t^5 - 6t^3 - 4t^2 + 5t + 4 = (t-1)(t+1)^2(t^2 - t - 4)$. Das Spektrum des Graphen ist damit $\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -1, -1, +1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Nur der Perron-Frobenius-Eigenwert $\lambda := \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ hat einen positive Eigenvektor. Man kann die Matrix $A - \lambda I$ in Zeilen-Stufen-Form bringen; etwas einfacher ist vielleicht, das Gleichungssystem direkt zu analysieren: für den Eigenvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$ — die zentrale Ecke sei 3 — erhalten wir Gleichungen $-\lambda x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0$, woraus sofort $x_1 = x_2 = \frac{-1}{1-\lambda} x_3$

folgt. Analog ist $x_3 - \lambda x_4 + x_5 = x + 3 + x_4 - \lambda x_5 = 0$, mithin $x_4 = x_5 = \frac{-1}{1-\lambda} x_3$. Weiterhin $0 = x_1 + x_2 - \lambda x_3 + x + 4 + x_5 = (\frac{-4}{1-\lambda} - \lambda) x_3$; diese Gleichung ist erfüllt wegen $\lambda(\lambda - 1) = 4$. Wir erhalten $(1, 1, \lambda - 1, 1, 1)^t = (1, 1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}, 1, 1)^t$ als Eigenvektor zu λ.

Aufgabe 6. (*8 Punkte*) Es sei G ein ungerichteter, endlicher, zusammenhängender Graph. Wir bezeichnen mit $\lambda_0(G)$ den Spektralradius (Perron-Frobenius-Eigenwert) von G und mit $\operatorname{maxdeg}(G)$ den Maximalgrad des Graphen, also die maximale Anzahl von Nachbarn unter allen Ecken. Zeigen Sie:
1) $\lambda_0(G) \leq \operatorname{maxdeg}(G)$.
2) Gleichheit $\lambda_0(G) = \operatorname{maxdeg}(G)$ gilt genau dann, wenn G regulär ist.

Lösung: Der Graph G habe n Ecken; wir schreiben $k := \operatorname{maxdeg}(G)$ und $v := (1, 1, \dots, 1)^t$ für den Vektor, dessen n Einträge alle 1 sind. Dann gilt $A(G) \cdot v \leq kv$, weil nach Definition von $A(G)$ der i-te Eintrag des Vektors $A(G) \cdot v$ genau der Grad der Ecke i ist. Daraus folgt wie im Beweis von Perron-Frobenius (PF4), dass $\lambda_0 \leq k$. (Sei v_0 bzw. w_0 Rechts- bzw. Links-PF-Eigenvektoren für A, also $w_0^t A = \mu_0 w_0^t$ und $Av_0 = \lambda_0 v_0$ mit $\lambda_0, \mu_0 > 0$ und $w_0 > 0$, $v_0 > 0$. Dann ist $0 < \mu_0 w_0^t v = w_0^t A v \leq k w_0^t v$ und somit $\mu_0 \leq k$. Außerdem stimmen Links- und Rechts-Spektralradien überein, $\lambda_0 = \mu_0$; das gilt für allgemeine irreduzible nicht-negative Matrizen, ist hier aber evident, weil $A = A(G)$ symmetrisch ist.)
Gleichheit wird ebenfalls behandelt wie in (PF4): $\lambda_0 = k \implies w_0^t(Av - kv) = 0$, also $Av = kv$, da $w_0 > 0$. Weiterhin folgt aus $Av = kv$, dass G ein k-regulärer Graph ist. (War Übungsaufgabe.)
Die Rückrichtung ist einfach: ist G k-regulär, dann gilt $Av = kv$, womit $k = \lambda_0$ der PF-Eigenwert von G ist und insbesondere $\lambda_0 = k = \operatorname{maxdeg}(G)$ gilt.