RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Sommersemester 2002
2002-06-03
Blatt 5 (korrigierte Fassung)

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 19: Skizzieren Sie das Phasenportrait (Bilder der verschiedenen Lösungskurven in der xy-Ebene mit Richtungspfeilen) des Systems

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) \end{aligned}\right\} (*) \qquad\qquad (f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } x, y \in \mathbb{R})$$

mit

a) $f(x) = -\cos x$ b) $f(x) = 2x(1-2x^2)$ c) $f(x) = -2x(1-2x^2)$.

Beachten Sie dabei die in Aufgabe 16 gefundenen allgemeinen Resultate!

Aufgabe 20: Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Weiter gebe es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < \operatorname{Re}\lambda < b$ für alle Eigenwerte λ von A. Zeigen Sie, dass man eine geeignete Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ so wählen kann, dass

$$a|\mathbf{x}|^2_{\mathcal{B}} \le \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{B}} \le b|\mathbf{x}|^2_{\mathcal{B}}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Hierbei bezeichne

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathcal{B}} := \sum_{j=1}^n x_j y_j \qquad \text{und} \qquad |\mathbf{x}|_{\mathcal{B}} := \big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_{\mathcal{B}}\big)^{\frac{1}{2}}$$

das Skalarprodukt bzw. die zugehörige Norm bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und (x_j), (y_j) die Koordinaten in dieser Basis (d. h. $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{b}_j$ usw.)

Hinweis: Man betrachte die komplexe Jordan-Normalform von A. Zunächst untersuche man den Fall, dass die Normalform nur einen Jordan-Block mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und Hauptvektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, also $A\mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{u}_1$ und $A\mathbf{u}_j = \lambda\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_{j-1}$ für $j = 2, \dots, n$, enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ angenommen werden. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wähle man die Basis

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{u}_1, \varepsilon\mathbf{u}_2, \dots, \varepsilon^{n-1}\mathbf{u}_n\} \qquad \textit{falls } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ bzw.}$$
$$\mathcal{B} := \{\operatorname{Re}\mathbf{u}_1, \operatorname{Im}\mathbf{u}_1, \varepsilon\operatorname{Re}\mathbf{u}_2, \varepsilon\operatorname{Im}\mathbf{u}_2, \dots, \varepsilon^{n-1}\operatorname{Re}\mathbf{u}_n, \varepsilon^{n-1}\operatorname{Im}\mathbf{u}_n\} \qquad \textit{falls } \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Anschließend untersuche man den allgemeinen Fall, dass die Normalform von A mehrere Jordanblöcke enthält.

Aufgabe 21: Begradigen Sie das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ in einer geeigeneten Umgebung V von $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d.h. geben Sie eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\Psi\colon U \longrightarrow V$ an, so dass $\big(D\Psi(\mathbf{y})\big)^{-1}\mathbf{f}(\Psi(\mathbf{y})) = \mathbf{e}_1$ für alle $\mathbf{y} \in U$ gilt. *Hinweis: Bei geschickter Wahl der Koordinaten kann U als offene Halbebene und V als offene „Viertelebene“ gewählt werden, wenn $\mathbf{x}_0$ nicht auf den Diagonalen liegt.*

(bitte wenden)

Aufgabe 22:

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Zeigen Sie, dass es keine nicht-konstante Lösung $x(t)$ der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ geben kann, die periodisch ist (d. h. eine Lösung, die auf $\mathbb{R}$ definiert ist und für die es ein $T > 0$ mit $x(t+T) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt). *Hinweis: Zeigen Sie, dass $x(t)$ streng monoton in t ist.* Gelten die Behauptungen auch für nicht autonome reelle Dgl. $\dot{x} = f(t;x)$ bzw. für reelle Dgl. höherer Ordnung?

b) Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Seien $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t;x)$ auf ihren maximalen Existenzintervallen $J(x_0^{(1),(2)})$, wobei $x^{(1),(2)}(t_0) = x_0^{(1),(2)}$ und $x_0^{(1)} < x_0^{(2)}$ gilt. Zeigen Sie, dass $x^{(1)}(t) < x^{(2)}(t)$ für alle $t \in J(x_0^{(1)}) \cap J(x_0^{(2)})$ gilt und dass die Zeitentwicklungsabbildung $\Phi(t_1 \leftarrow t_0, \cdot)\colon U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

Präsenzaufgabe A: Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix einer linearen Abbildung in der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Wie sieht die entsprechende Matrix in der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \varepsilon\, \mathbf{e}_2\}$ aus? Schätzen Sie $|\langle \mathbf{x}, (A-\lambda)\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{B}}|$ durch ein Vielfaches von $|\mathbf{x}|_{\mathcal{B}}^2$ ab!

Präsenzaufgabe B: Sei $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ (mit $\beta \neq 0$) und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

die Matrix einer linearen Abbildung in der Basis

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathrm{i}\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_3 + \mathrm{i}\mathbf{e}_4 \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathrm{i}\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_3 - \mathrm{i}\mathbf{e}_4$$

($\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ sei die Standard-Basis des $\mathbb{R}^4$). Stellen Sie A in der reellen Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \varepsilon\, \mathbf{e}_3, \varepsilon\, \mathbf{e}_4\}$ dar!. Schätzen Sie $|\langle \mathbf{x}, (A-\alpha)\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{B}}|$ durch ein Vielfaches von $|\mathbf{x}|_{\mathcal{B}}^2$ ab!

Präsenzaufgabe C: Bezeichnungen wie in Aufgabe 22 b):
Seien $f(t;x) = \cos t$, $x_0^{(1)} = x^{(1)}(t_0 = 0) = 0$ und $x_1^{(2)} = x^{(2)}(t_1 = \pi/2) = a \in \mathbb{R}$. Was folgt für das Vorzeichen von $x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$?

Präsenzaufgabe D: Zu Aufgabe 21.
Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{f}$ und die Lösungskurven. Geben Sie eine „entkoppelte" Differentialgleichung (höherer Ordnung) für x_1 alleine an. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Lösen Sie das AWP mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.