RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Sommersemester 2002
2002-07-01
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 31: Sei $D \subset \mathbb{R}^\nu$ offen und beschränkt, $\mathbf{x}_0 \in D$ und

$$X = \{\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^\nu) \mid \|f\|_{C^1} < \infty \text{ und } \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0\}$$

der Banachraum der Vektorfelder in D, die in $\mathbf{x}_0$ eine Gleichgewichtslage haben. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{C^1}$ die Norm

$$\|\mathbf{f}\|_{C^1} = \sup_{x \in D} (|\mathbf{f}(\mathbf{x})| + \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|).$$

Sei $Y \subset X$ die Teilmenge der Vektorfelder, die in $\mathbf{x}_0$ eine hyperbolische Gleichgewichtslage haben (d. h. $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ hat keinen Eigenwert mit Realteil 0). Zeigen Sie, dass Y offen und dicht in X ist. *Hinweis: Für die Offenheit können Sie wie in Aufgabe 29 vorgehen, für die Dichtheit können Sie direkt das Ergebnis aus Aufgabe 29 verwenden.*

Aufgabe 32: *Beweis der lokalen Variante des Satzes von Hartman-Grobman*
Sei $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^\nu)$ für $D \subset \mathbb{R}^\nu$ offen, $\mathbf{0} \in D$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $A := (D\mathbf{f})(\mathbf{0})$. Sei $\rho > 0$ so klein, dass $B_\rho(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu \mid |\mathbf{x}| < \rho\} \subset D$ gilt. Schließlich sei

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x} & \text{für } |\mathbf{x}| \leq \rho, \\ \mathbf{f}(\rho \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}) - A\rho \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} & \text{für } |\mathbf{x}| > \rho. \end{cases}$$

Zeigen Sie: (i) Die Funktion g ist global Lipschitzstetig. (ii) Die Lipschitz-Konstante $L = L(\rho)$ kann beliebig klein gewählt werden (für geeignet kleines $\rho > 0$). (iii) g ist beschränkt. (iv) Das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ist für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^\nu$ *global* eindeutig lösbar. (v) Für $x_0 \in B_\rho(\mathbf{0})$ seien $t_\pm = t_\pm(\mathbf{x}_0)$ so gewählt, dass $\mathbf{x}(t) \in B_\rho(\mathbf{0})$ für alle $t_- < t < t_+$, dann gilt für diese Zeiten auch $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Aufgabe 33: *Beispiel zum Satz von Hartman-Grobman*
Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{x} + \frac{-1}{\ln |\mathbf{x}|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} & \text{für } 0 < |\mathbf{x}| < 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{f}\colon B_1(\mathbf{0}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1-Funktion mit Ableitung $A := D\mathbf{f}(0) = -\mathbb{1}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung, indem Sie Polarkoordinaten einführen (vgl. Aufgabe 11).

(bitte wenden)

c) Zeigen Sie, dass
$$h(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ D(\varphi(r))\,\mathbf{x} & \text{für } 0 < r = |\mathbf{x}| \end{cases}$$
mit $\varphi(r) = -\ln\ln\frac{1}{r}$ ein Homöomorphismus ist, der den Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$ mit dem linearen Fluss $\Psi_t(\mathbf{y}) := \mathrm{e}^{At}\mathbf{y} = \mathrm{e}^{-t}\mathbf{y}$ konjugiert, d. h., dass $h(\Phi_t(\mathbf{x})) = e^{-t}h(\mathbf{x})$ gilt. Hierbei ist
$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
die Drehmatrix mit Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$. *Hinweis: Sie können sich Rechnungen ersparen, indem Sie $D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1)D(\varphi_2)$ sowie $|D(\varphi_1)\,\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ausnutzen!*

Aufgabe 34: Eine Verbesserung der Volterra-Lotka-Gleichungen, die zusätzlich das Konkurrenzverhalten von Räubern bzw. Beutetieren untereinander beschreibt, ist durch das folgende Differentialgleichungssystem gegeben:
$$\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& (1-y)x - \mu x^2 \\ \dot{y} &=& (x-1)y - \nu y^2 \end{array}, \qquad x, y \in (0, \infty)$$
(vgl. Aufgabe 28 mit $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ und $\mu = \nu = 0$). Berechnen Sie die Gleichgewichtslage für $0 < \mu < 1$ und $\nu > 0$, und zeigen Sie mit Hilfe der Linearisierung, dass diese asymptotisch-stabil ist.

Präsenzaufgabe A: (zu Aufgabe 34)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\operatorname{spur} A < 0$ und $\det A > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft einer Gleichgewichtslage, asymptotisch stabil zu sein, unter topologischer Konjugation erhalten bleibt.

Präsenzaufgabe B: (zu Aufgabe 32)

Betrachten Sie den Fall $\nu = 1$. In diesem Fall ist $Df(0) = f'(0) = a \in \mathbb{R}$. Machen Sie eine Skizze der Funktion g. Zeigen Sie die Behauptungen (i) bis (v) für diesen Fall.

Präsenzaufgabe C: (zu Aufgabe 33)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $h\colon \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ in $\mathbf{0}$ nicht stetig differenzierbar ist.

Präsenzaufgabe D: (zu Aufgabe 34)

Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld zum Differentialgleichungssystem.