RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2003-01-20
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 34: Sei $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ eine Differentialgleichung, die zu jedem $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^\nu$ eine eindeutige Lösung hat (dies ist z. B. der Fall, falls $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^\nu)$).

a) Der zugehörige Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$ erfülle $\Phi_{t_1}(\mathbf{x}) = \Phi_{t_2}(\mathbf{x})$ für zwei Zeitpunkte $t_1 < t_2$. (i) Zeigen Sie, dass $\Phi_t(\mathbf{x})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert und $T := t_2 - t_1$-periodisch ist. (ii) Falls $\Phi_{t_1}(\mathbf{x}) \neq \Phi_t(\mathbf{x})$ für alle $t_1 < t < t_2$ gilt, dann hat $\mathbf{x}$ Primperiode T. (iii) Falls $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, dann hat $\mathbf{x}$ Primperiode T/k für ein $k \in \mathbb{N}$.

b) Ist $\mathbf{x}$ nicht periodisch, so gilt $\Phi_t(\mathbf{x}) \neq \Phi_{t'}(\mathbf{x})$ für alle $t \neq t'$ aus dem maximalen Existenzintervall.

Aufgabe 35: *Beweis eines Spezialfalles von Lemma 4.2 der Vorlesung*
Sei $\hat{\mathbf{f}} \in C^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu)$ mit hyperbolischer Gleichgewichtslage $\overline{\mathbf{x}}$. Weiter sei $\mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu)$ bezüglich der ersten Variable T-periodisch ($\mathbf{g}(t; \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t+T; \mathbf{x})$). Für $\mu \in \mathbb{R}$ (nahe 0) ist dann

$$\mathbf{f}(\mu, t; \mathbf{x}) := \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}(t; \mathbf{x})$$

eine periodische Störung von $\hat{\mathbf{f}}$. Zeigen Sie, dass es zu $t_0 \in \mathbb{R}$ ein $\mu_0 > 0$ und eine Umgebung U_0 von $\overline{\mathbf{x}}$ gibt, so dass für alle μ mit $|\mu| < \mu_0$ die Abbildung $\mathbf{F}_{\mu,t_0,T} \colon \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ definiert durch $\mathbf{F}_{\mu,t_0,T}(\mathbf{x}) := \Phi(\mu, t_0 \to t_0 + T; \mathbf{x})$ in U_0 einen eindeutigen hyperbolischen Fixpunkt $\tilde{\mathbf{x}}(\mu)$ mit $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{x}}$ hat. *Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Existenz von $\tilde{\mathbf{x}}(\mu)$ für kleine $|\mu|$ mit dem Satz über implizite Funktionen, und untersuchen Sie, wann der Fixpunkt hyperbolisch ist.*

Aufgabe 36: Sei $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{S}^1$ die Menge $M_z := \{cn + z \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{S}^1$ liegt, wenn $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt, indem Sie folgende Schritte beweisen: (i) M_z hat unendlich viele Elemente. (ii) M_z hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{S}^1$. (iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$, so dass $d_{\mathbb{S}^1}(c(k+n)+z, cn+z) < \varepsilon$ gilt. (iv) Nutzen Sie die Translationsinvarianz der Metrik auf $\mathbb{S}^1$ aus, und konstruieren Sie eine Folge von Punkten aus M_z, die $\mathbb{S}^1$ in Abschnitte mit Länge kleiner als ε zerlegt. (v) Schließen Sie auf die Behauptung.

Aufgabe 37: Auf dem zweidimensionalen (flachen) Torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sei die Differentialgleichung $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für $c \in \mathbb{Q}$ alle Orbits periodisch sind. Geben Sie die Primperiode an.

b) Zeigen Sie, dass für $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jeder Orbit dicht auf dem Torus ist. *Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 36!*

(bitte wenden)

Präsenzaufgabe A: Sei $\omega(x)$ die (zukünftige) Limesmenge zum Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$. Zeigen Sie, dass aus $y \in \omega(x)$ die Inklusion $\omega(y) \subseteq \omega(x)$ folgt. Gilt die umgekehrte Inklusion? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Präsenzaufgabe B:

Sei $\mathbf{x}_0$ Gleichgewichtslage der autonomen Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f} \in C^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu)$, mit Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$. Berechnen Sie $(D_\mathbf{x}\Phi_t)(\mathbf{x}_0)$. *Hinweis: Stellen Sie eine Differentialgleichung für* $(D_\mathbf{x}\Phi_t)(\mathbf{x}_0)$ *auf!*

Präsenzaufgabe C:

Sei $H(x,p) := p^2/2 + V(x)$ mit $V(x) := x^4/4 - x^2/2$ die Hamilton-Funktion zum *Duffing-Oszillator*. Berechnen Sie das zugehörige Vektorfeld und dessen Linearisierung um die elliptischen Gleichgewichtslagen. Geben Sie die Lösung für das linearisierte System an. Skizzieren Sie das Phasenportrait (qualitativ) für die Fälle $-1/4 < H_0 < 0$ und $H_0 > 0$ mit $H(x,p) = H_0$.

Präsenzaufgabe D: Berechnen Sie den Fluss zur Differentialgleichung aus Aufgabe 37 und skizzieren Sie (einige) Orbits.