

Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 2 zum 1.11.11

1. Diese Aufgabe steht auf dem Blatt der Serie 1 als Aufgabe 3 (der Abgabetermin wurde um eine Woche verlängert).
2. R sei ein kommutativer Ring.
 - (i) Zeigen Sie: Sind M und N zwei R -Moduln, so ist die Menge $\text{Hom}_R(M, N)$ der R -Modulhomomorphismen von M nach N ebenfalls ein R -Modul mit den Operationen $(f, g) \mapsto f + g$ und $(a, f) \mapsto a \cdot f$, wobei $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$ und $a \in R$ sind:
$$(f + g)(m) := f(m) + g(m), \quad (a \cdot f)(m) := a \cdot f(m)$$
 - (ii) Bestimmen Sie $\text{Hom}_R(R, M)$ für einen R -Modul M .
 - (iii) Bestimmen Sie für ganze Zahlen m, n den \mathbb{Z} -Modul $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$.
3. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Aussagen:
 - (i) Jeder freie Modul hat eine Basis.
 - (ii) Aus jedem Erzeugendensystem eines freien Moduls läßt sich eine Basis auswählen.
 - (iii) Jedes linear unabhängige System von Elementen eines freien Moduls läßt sich zu einer Basis ergänzen.
- 4.* Zeigen Sie: Die Faktorgruppe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist kein Ring.¹

Hinweise:

Für den Übungsschein sind Punkte erforderlich, die Sie mit den Übungsaufgaben (Hausaufgaben) und bei einer Übungsklausur erwerben können (Termin im Dezember oder Januar – wird noch festgelegt). *-Aufgaben sind fakultativ, bringen aber Zusatzpunkte. Bei den übrigen Aufgaben ist die halbe Summe der Punkte Kriterium für den Erwerb des Scheins. Hausaufgaben bringen je 10, Klausuraufgaben bis zu 100 Punkte. Falls Sie absehen können, dass Sie die erforderliche Punktzahl zum Semesterschluss nicht erreichen, sollten Sie frühzeitig einen Konsultationstermin vereinbaren.

Die Hausaufgaben können auch in kleinen Gruppen (zu zweit) gelöst und abgegeben werden (in diesem Fall bitte beide Namen und Matrikelnummern auf jedem Aufgabenblatt angeben).

Die Abgabe der Aufgaben erfolgt nach der Dienstagsvorlesung bis 14.50 Uhr im Vorlesungsraum (nach Aufgaben sortiert).

Die Übungen finden ab sofort um 15.00 im Raum RUD 25, 1.013 statt.

¹ Bevor Sie hier irgendetwas beweisen: Geben Sie zunächst eine exakte, sinnvolle Formulierung der Behauptung an!