

NUMERISCHE APPROXIMATION

VORLESUNGSSKRIPTE
Winter-Semester 1999/2000

Werner Römisch

Humboldt-Universität Berlin
Institut für Mathematik

Inhalt:	Seite
0. Inhalt	2
1. Das allgemeine Approximationsproblem und Approximation durch Polynome	3
1.1 Das Approximationsproblem in normierten Räumen	3
1.2 Approximation von Funktionen mittels orthonormierter Polynome	10
1.3 Gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen	16
1.4 Polynom-Interpolation stetiger Funktionen	26
2. Splines	32
2.1 B-Splines und Splineräume	32
2.2 Interpolation mit Splines	38
2.3 Konvergenz approximierender und interpolierender Splines	47
3. Wavelets	54
3.1 Grundlagen der Fourier-Analyse	55
3.2 Wavelets	64
3.3 Wavelet-Transformation	68
3.4 Orthogonale Wavelets und Multiskalen-Analyse	73
4. Literatur	89

1 Das allgemeine Approximationsproblem und Approximation durch Polynome

1.1 Das Approximationsproblem in normierten Räumen

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein linearer normierter Raum und $V \subset X$ eine beliebige (nichtleere) Teilmenge von X .

Definition 1.1 Ein Element $v \in V$ heißt Proximum an $x \in X$ aus V , falls

$$\|v - x\| = \inf_{u \in V} \|u - x\|.$$

Die Zahl $d_V(x) := \inf_{u \in V} \|u - x\|$ heißt Abstand von x zu V .

Die Abbildung P_V von X auf V , die einem Element $x \in X$ die Menge aller Proxima an x aus V zuordnet, heißt (mengenwertige) metrische Projektion von X auf V .

Bemerkung 1.2 : Die Existenz von Proxima und die Eigenschaften der metrischen Projektion in Abhängigkeit von der Struktur von X bzw. von den Eigenschaften von V sind eine klassische Fragestellung der Funktionalanalysis und Approximationstheorie. Wir werden im folgenden einige Antworten geben, werden aber nicht annähernd den aktuellen Stand reflektieren können.

Lemma 1.3 Jede Minimalfolge (u_n) in V für $x \in X$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x\| = d_V(x)$, ist beschränkt und jeder zu V gehörige Häufungspunkt dieser Folge ist Proximum an $x \in X$ aus V .

Beweis: Es sei (u_n) eine beliebige Minimalfolge in V für ein (gegebenes) $x \in X$. Dann gilt für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$d_V(x) \leq \|x - u_n\| \leq d_V(x) + 1$$

und damit $\|u_n\| \leq \|x - u_n\| + \|x\| \leq d_V(x) + \|x\| + 1$. Also ist die Folge (u_n) beschränkt. Ist nun (u_{n_k}) eine gegen $v \in V$ konvergente Teilfolge von (u_n) , so gilt

$$d_V(x) \leq \|x - v\| \leq \|x - u_{n_k}\| + \|u_{n_k} - v\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} d_V(x),$$

d.h. $d_V(x) = \|x - v\|$ und v ist Proximum an x aus V . □

Da natürlich i.A. keine Minimalfolge in V für $x \in X$ einen Häufungspunkt besitzen muss, liefert das Lemma nicht direkt die Existenz von Proxima. Es liefert aber eine Beweismethodik, die unter weiteren Voraussetzungen an X und V zum Ziel führen kann. Unser wichtigstes Resultat (im Rahmen dieser Vorlesung) ist:

Satz 1.4 Es sei eine der folgenden drei Voraussetzungen erfüllt:

- (i) V ist kompakt;
- (ii) V ist abgeschlossene Teilmenge eines endlichdimensionalen Teilraumes von X ;
- (iii) X ist ein Hilbertraum und V ist konvex und abgeschlossen.

Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein Proximum an x aus V .

Beweis: Es sei $x \in X$ beliebig gewählt und wir behandeln die Fälle (i)-(iii) einzeln.

(i) Ist V kompakt, so folgt die Aussage sofort aus Lemma 1.3.

(ii) Es sei (u_n) eine Minimalfolge in V für $x \in X$. Nach Lemma 1.3 ist (u_n) beschränkt und nach Voraussetzung liegt (u_n) in einem endlichdimensionalen Teilraum von X . Deshalb existiert eine konvergente Teilfolge von (u_n) (mit Grenzwert $v \in X$). Da V abgeschlossen ist, gilt $v \in V$.

Nach Lemma 1.3 ist v Proximum an x aus V .

(iii) Es sei (u_n) eine Minimalfolge in V für $x \in X$. Wir zeigen: (u_n) ist konvergent in V (nach Lemma 1.3 ist dann alles bewiesen).

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei das Skalarprodukt in X . Dann gilt zunächst die folgende Identität:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_n - x\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m - x\|^2 - \|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - x\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2 - \|\frac{1}{2}(u_n + u_m)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 - 2\langle u_n, u_m \rangle\right] \\ &= \frac{1}{4}\|u_n - u_m\|^2. \end{aligned}$$

Da V konvex ist, gilt $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in V$ und $\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - x\| \geq d_V(x)$. Deshalb gilt:

$$\|u_n - u_m\|^2 + 4d_V^2(x) \leq 2\left[\|u_n - x\|^2 + \|u_m - x\|^2\right].$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\|u_n - x\|^2 + \|u_m - x\|^2 \leq 2d_V^2(x) + \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Daraus folgt:

$$\|u_n - u_m\|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Also ist (u_n) Fundamentalfolge in X , deshalb konvergent in X und damit auch in V , da V abgeschlossen ist. \square

Bemerkung 1.5 In vielen praktischen Anwendung der Approximationstheorie ist V konvex (P_V heißt dann konvexe Projektion) bzw. sogar V linear (man spricht dann von linearer Approximation). In diesen Fällen liefern die Voraussetzungen (ii) und (iii) brauchbare Resultate. Voraussetzung (i) kann verallgemeinert werden zu (i)': V ist sequentiell kompakt bezüglich der schwachen Topologie in X ; oder (i)": V ist sequentiell abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie in X , und X ist ein reflexiver Banachraum.

((i)" enthält als Spezialfall Voraussetzung (iii) da Hilberträume reflexiv sind und konvexe, abgeschlossene Mengen sequentiell abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie sind.)

Beispiel 1.6 $X := C([0, 1])$ mit $\|x\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$, $\forall x \in X$, und wir betrachten

$$V := \left\{ u \in X : u(t) = \exp\left(\frac{t}{\beta}\right), \quad \forall t \in [0, 1], \beta > 0 \right\}, \quad x(t) := \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Frage: Existiert ein Proximum an x aus V ?

Für jedes $u \in V$ gilt zunächst

$$\|x - u\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} \left| \frac{1}{2} - \exp\left(\frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{2} \right| \quad \text{und deshalb}$$

$$d_V(x) = \inf_{u \in V} \|x - u\|_\infty = \inf_{\beta > 0} \left\{ \exp\left(\frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}.$$

\leadsto es existiert kein Proximum an x aus V !

Ursache: V ist *nicht* endlichdimensional und *nicht* abgeschlossen!

Für konvexes V wollen wir nun die Struktur der Menge aller Proxima zu einem gegebenen $x \in X$ an V , (d.h. die Struktur der Bilder von P_V) untersuchen.

Satz 1.7 *Ist V konvex und abgeschlossen, so sind die Bilder der metrischen Projektion P_V von X in V entweder leer, einelementig oder konvex und abgeschlossen mit unendlich vielen Elementen.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Bilder von P_V stets konvex und abgeschlossen sind und dass mit zwei verschiedenen Elementen in einem solchen Bild auch unendlich viele dazugehören.

Der letzte Teil dessen folgt aber bereits aus der Konvexität der Bilder. Ist nämlich $x \in X$ beliebig gewählt und sind $v_1, v_2 \in P_V(x)$ mit $v_1 \neq v_2$, so sind $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2$, $\lambda \in [0, 1]$, unendlich viele Elemente, die ebenfalls zu V gehören.

Es sei jetzt $x \in X$ und wir zeigen zunächst, dass $P_V(x)$ abgeschlossen ist. Dazu sei (v_n) eine Folge in $P_V(x)$ mit $v_n \rightarrow v$. Da V abgeschlossen ist, gilt $v \in V$. Ferner gilt nach Definition $d_V(x) = \|x - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x - v\|$ und folglich $d_V(x) = \|x - v\|$, d.h.

$v \in P_V(x)$. Wir zeigen jetzt, dass $P_V(x)$ konvex ist. Dazu seien $v_1, v_2 \in P_V(x)$ und $\lambda \in [0, 1]$ beliebig gewählt.

$$\leadsto \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in V$$

$$\leadsto d_V(x) \leq \|x - (\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2)\| \leq \lambda \|x - v_1\| + (1 - \lambda) \|x - v_2\| = d_V(x)$$

$$\leadsto \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in P_V(x). \quad \square$$

In Satz 1.4 hatten wir bereits die Frage untersucht, wann P_V stets nichtleere Bilder hat. Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wann die Bilder von P_V stets einelementig sind (d.h. P_V eine eindeutige Abbildung ist),

Beispiel 1.8 $X := \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, 2, 3\}$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Wir betrachten $V := \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $x := (1, 3, 2)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} d_V(x) &= \inf_{u \in V} \|x - u\|_\infty = \inf_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}} \|(1, 3, 2) - \alpha_1(1, 0, 0) - \alpha_2(0, 1, 0)\|_\infty \\ &= \inf_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}} \|(1 - \alpha_1, 3 - \alpha_2, 2)\|_\infty = 2. \end{aligned}$$

- $\leadsto P_V(x) = \{\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) : |1 - \alpha_1| \leq 2, |3 - \alpha_2| \leq 2\}$
 $\leadsto P_V$ ist selbst in endlichdimensionalen Räumen i.A. nicht eindeutig!

Definition 1.9 Eine Menge $V \subset X$ heißt Tschebychev-Menge, falls die Bilder von P_V höchstens einelementig sind.

Der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt streng normiert, falls aus der Gültigkeit der Gleichung $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ für je zwei Elemente $x, y \in X, x \neq 0, y \neq 0$ folgt, dass die beiden Elemente linear abhängig sind (d.h. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ mit $x = \alpha y$).

Satz 1.10 Jede konvexe Menge in einem streng normierten Raum ist eine Tschebychev-Menge. Insbesondere gilt dies in jedem unitären Raum.

Beweis: Es sei $(X, \|\cdot\|)$ streng normiert und $V \subset C$ konvex. Wir nehmen nun an, dass ein $x \in X$ und Elemente $v_1, v_2 \in P_V(x)$ mit $v_1 \neq v_2$ existieren. Nach Satz 1.7 gilt zunächst: $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in P_V(x)$.

- $\leadsto d_V(x) = \|x - \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x - v_1\| + \frac{1}{2}\|x - v_2\| = d_V(x)$
 $\leadsto \|(x - v_1) + (x - v_2)\| = \|x - v_1\| + \|x - v_2\|.$

Da der Raum streng normiert ist und nach Annahme $x \neq v_1$ und $x \neq v_2$ gilt (andernfalls würde $x \in V$ und $v_1 = v_2$ folgen!), existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x - v_1 = \alpha(x - v_2)$.

Wegen $d_V(x) = \|x - v_1\| = \|x - v_2\|$ folgt daraus $|\alpha| = 1$.

Für $\alpha = 1$ folgt $v_1 = v_2$ und damit ein Widerspruch.

Für $\alpha = -1$ folgt $2x = v_1 + v_2$, d.h. $x = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in V$, und damit ebenfalls ein Widerspruch. Also ist V eine Tschebychev-Menge.

Wir zeigen schließlich, dass jeder unitäre Raum streng normiert ist.

Es seien $x, y \in X$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 + 2(\langle x, y \rangle - \|x\|\|y\|) \end{aligned}$$

Also gilt die Gleichung $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ genau dann, wenn $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$.

Letzteres gilt aber ebenfalls gdw. x und y linear abhängig sind. \square

Folgerung 1.11 Ist X ein Hilbertraum (unitärer Raum) und V konvex und abgeschlossen (endlichdimensionaler Teilraum von X), so existiert zu jedem $x \in X$ genau ein Proximum an x aus V .

Beweis: Dies folgt durch Kombination der Sätze 1.4 und 1.10. \square

Beispiel 1.12

- a) $X := C([a, b])$ mit $\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)y(t)dt, \forall x, y \in X$, ist ein unitärer Raum, also streng normiert.

b) $X := C([a, b])$ mit $\|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ ist *nicht* streng normiert.

Wir betrachten $x(t) := 1$ und $y(t) := t - a, \forall t \in [a, b]$.

$\leadsto \|x + y\|_\infty = b - a + 1 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, aber x und y sind linear unabhängig.

c) \mathbb{R}^m ist mit $\|\cdot\|_\infty$ (vgl. Bsp. 1.8) nicht streng normiert, aber ist streng normiert mit jeder der Normen $\|\cdot\|_p, p > 1$, wobei

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m),$$

da für diese in der Dreiecksungleichung die Gleichheit genau dann gilt, wenn die betreffenden Elemente linear abhängig sind.

Bemerkung 1.13 In jedem nicht streng normierten linearen Raum X existiert ein endlichdimensionaler Unterraum V und ein Element $x \in X$, so dass $P_V(x)$ nicht einelementig ist (vgl. Hämmerlin/Hoffmann, Kap. 4.3.5). Allerdings gibt es endlichdimensionale Teilräume nicht streng normierter linearer Räume, so dass das Proximum an alle Elemente eindeutig bestimmt ist. In Kapitel 1.3 werden wir in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ davon profitieren.

Die strenge Normiertheit eines linearen Raumes X kann äquivalent wie folgt charakterisiert werden: Für alle $x, y \in X, x \neq y, \|x\| = 1, \|y\| = 1$ gilt

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1, \quad \forall \lambda \in (0, 1),$$

d.h. für verschiedene Elemente x, y auf dem Rand der Einheitskugel in X liegen die Elemente $\lambda x + (1 - \lambda)y, \forall \lambda \in (0, 1)$, im Inneren derselben.

In einem endlichdimensionalen Hilbertraum ist jede Tschebychev-Menge auch konvex (gewisse Umkehrung von Satz 1.10). In unendlichdimensionalen Hilberträumen ist dies noch eine offene Frage!

Abschließend wenden wir uns noch einigen speziellen Aspekten der Approximation in unitären Räumen zu und beginnen mit der Charakterisierung des Proximums im Fall, dass V konvex bzw. ein linearer Teilraum ist. Nach Satz 1.10 existiert dann höchstens ein Proximum.

Satz 1.14 *Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, $x \in X$ und $V \subset X$ konvex. Dann ist $v \in V$ Proximum an x aus V gdw.*

$$\langle x - v, u - v \rangle \leq 0, \quad \forall u \in V \quad (\text{"Variationsungleichung"}).$$

Ist V sogar ein linearer Teilraum von X , so ist $v \in V$ Proximum an x aus V gdw.

$$\langle x - v, u \rangle = 0, \quad (\forall u \in V),$$

d.h. $x - v$ ist orthogonal zum Teilraum V .

(Die metrische Projektion P_V heißt im letzteren Fall orthogonale Projektion.)

Beweis:

(\leftarrow) Es gelte $\langle x - v, u - v \rangle \leq 0, \forall u \in V$ (für ein $v \in V$).

Es sei $u \in V$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x - u\|^2 &= \|(x - v) - (u - v)\|^2 = \|x - v\|^2 - 2\langle x - v, u - v \rangle + \|u - v\|^2 \geq \|x - v\|^2 \\ \leadsto v &\in P_V(x) \text{ oder } v \text{ ist Proximum an } x \text{ aus } V. \end{aligned}$$

(\rightarrow) Es sei $v \in V$ Proximum an x aus V . Es sei $u \in V$ beliebig gewählt und wir betrachten die Elemente $v_t := v + t(u - v) \in V, \forall t \in (0, 1]$. Dann gilt für solche t :

$$\begin{aligned} \|x - v\|^2 &\leq \|x - v_t\|^2 = \|x - v\|^2 - 2t\langle x - v, u - v \rangle + t^2\|u - v\|^2 \\ \leadsto 0 &\leq -2t\langle x - v, u - v \rangle + t^2\|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Nach Division durch t und anschließend $t \rightarrow 0+$ entsteht :

$$\langle x - v, u - v \rangle \leq 0, \quad \forall u \in V.$$

Ist nun V ein linearer Teilraum von X , so ist für beliebiges $u \in V$ auch $u + v$ und $-u + v$ in V . Setzt man diese beiden Elemente in die Variationsungleichung anstelle von u ein, so entsteht die Aussage. \square

Wir zeigen nun wie Satz 1.14 zur Berechnung des Proximums verwendet werden kann.

Folgerung 1.15 *Es sei $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset X$ und $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. $v \in V$ ist genau dann Proximum an $x \in X$ aus V , wenn*

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \langle x, \varphi_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n.$$

(Der Koeffizientenvektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ genügt also den sog. Normalgleichungen.)

Überdies gilt: $\|x - v\| = \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, \varphi_i \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$.

Beweis: Nach Satz 1.14 ist $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \in V$ Proximum an $x \in X$ aus V

gdw. $\langle x - v, u \rangle = 0, \forall u \in V$ gdw. $\langle x - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \varphi_k \rangle = 0, \forall k = 1, \dots, n$

gdw. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \langle x, \varphi_k \rangle, \forall k = 1, \dots, n.$

Für den Abstand $d_V(x)$ gilt : $d_V^2(x) = \|x - v\|^2 = \langle x - v, x - v \rangle = \langle x - v, x \rangle = \|x\|^2 - \langle v, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \varphi_i, x \rangle$ (wegen Satz 1.14). \square

Bemerkung 1.16 Sind die Elemente $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (o.B.d.A.) linear unabhängig, so ist die Matrix $(\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle)_{i,k=1,\dots,n}$ der Normalgleichungen (die sogenannte *Gramsche Matrix*) regulär (sogar positiv definit).

(Beweis: Das Element $x = 0 \in X$ besitzt nach Folgerung 1.11 genau ein Proximum aus V , nämlich $v = 0$, d.h. $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n$. Also besitzen die homogenen Normalgleichungen nur die triviale Lösung. Also ist die Gramsche Matrix regulär.)

Folgerung 1.17 Es seien $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset X$ und die Elemente $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ seien orthonormiert, d.h. $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \delta_{ik}$, $i \neq k$. Dann ist $v \in V$ Proximum an $x \in X$ aus V gdw.

$$v = \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i.$$

Beweis: folgt sofort aus Folgerung 1.15. □

Definition 1.18 Ein Orthonormalsystem $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ (d.h. $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \delta_{ik}, \forall i \neq k, i, k \in \mathbb{N}$) heißt vollständig, falls $\text{span}\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist.

Satz 1.19 (Konvergenz der Proxima)

Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in X . Ferner seien $V_n := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ und $v_n \in V_n$ das Proximum an ein gegebenes $x \in X$ aus V_n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - x\| = 0$ und

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2 \quad (\text{Parseval'sche Gleichung})$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert zum gegebenen $x \in X$ eine Folge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \in V_{n_k} := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_k}\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, mit $x_{n_k} \rightarrow x$, wobei (o.B.d.A.) $n_{k-1} \leq n_k \rightarrow \infty$ gilt. Diese Folge kann wie folgt aufgefüllt werden zu einer Folge (x_n) mit $x_n \in V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, und $x_n \rightarrow x$.

Für $n < n_1$ definieren wir $x_n := 0$ und falls $n_{k-1} \leq n < n_k$ wählen wir $x_n := x_{n_{k-1}}$. Dann gilt natürlich

$$\|x - v_n\| \leq \|x - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{und } \|x - v_n\|^2 = \|x\|^2 - \langle v_n, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Bemerkung 1.20 Ist $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in X , so gilt nach Folgerung 1.15 stets

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall x \in X \quad (\text{Bessel'sche Ungleichung}).$$

Nach Satz 1.19 ist das Orthonormalsystem vollständig gdw. in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen für jedes $x \in X$ (d.h. die Parsevalsche Gleichung) gültig ist.

Ist das Orthonormalsystem vollständig, so folgt aus $\langle x, \varphi_i \rangle = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, stets $x = 0$ (d.h. nur $x = 0$ kann zu allen Elementen des Orthonormalsystems orthogonal stehen). Gilt nämlich $\langle x, \varphi_i \rangle = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, so auch $\langle x, v_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Wegen $v_n \rightarrow x$ nach Satz 1.19 muss also $\langle x, v_n \rangle = 0 \rightarrow \|x\|^2$ und $x = 0$ gelten.

1.2 Approximation von Funktionen mittels orthonormierter Polynome

Wir betrachten den unitären Raum $X := C([a, b])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)y(t)dt, \forall x, y, \in X$$

(vgl. Bsp. 1.12a). Unser Ziel in diesem Kapitel ist die Anwendung der allgemeinen Theorie aus Kapitel 1.1 für unitäre Räume und endlichdimensionale Teilräume $V_n := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, wobei $\varphi_i(t) := t^{i-1}$, $\forall t \in [a, b]$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Einerseits könnte direkt Folgerung 1.15 angewendet werden (Aufstellung und Lösung der Normalgleichungen zur Bestimmung des Proximums; Nachteil: große *volle* schlecht konditionierte Gleichungssysteme) oder andererseits ein Orthonormalsystem von Polynomen konstruiert und mit Folgerung 1.17 das Proximum an ein $x \in X$ aus V_n (in einfacher Weise) berechnet werden. Wir verfolgen den letzteren Weg und führen die Konstruktion eines Orthonormalsystems (zunächst) für den Fall $[a, b] := [-1, 1]$ durch. Da die Räume V_n sämtliche Polynome vom Grad $\leq n - 1$ enthalten, wollen wir sie im folgenden mit \mathcal{P}_{n-1} bezeichnen. Also enthält \mathcal{P}_k alle Polynome vom Grad $\leq k$ ($\forall k \geq 0$).

Satz 1.21 Die folgenden Polynome $L_k \in \mathcal{P}_k, \forall k \geq 0$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $(C([-1, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$:

$$L_k(t) := \frac{1}{2^k k!} \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k], \quad \forall t \in [-1, 1], \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

(normierte Legendre'sche Polynome).

Insbesondere gilt: $L_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $L_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$, $L_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1)$ etc.

Beweis: Wir konstruieren die Polynome $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$, indem wir von den Orthogonalitätsbedingungen $\langle L_n, L_k \rangle = \int_{-1}^1 L_n(t)L_k(t)dt = 0, \forall k < n$, ausgehen.

Diese Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt, falls $\langle L_n, p \rangle = 0, \forall p \in \mathcal{P}_k, \forall k < n$. Um daraus L_n zu berechnen, machen wir den folgenden Ansatz:

Diese Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt, falls $\langle L_n, p \rangle = 0, \forall p \in \mathcal{P}_k, \forall k < n$. Um daraus L_n zu berechnen, machen wir den folgenden Ansatz:

$$L_n = \frac{1}{\|\eta_n\|} \eta_n, \eta_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \chi_n(t), \chi_n^{(n-k)}(t) = \int_{-1}^t \chi_n^{(n-k+1)}(\tau) d\tau, \forall t \in [-1, 1], k = 1, \dots, n.$$

Damit gilt $\chi_n^{(n-k)}(-1) = 0, \forall k = 1, \dots, n$, und für beliebiges $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(t) \chi_n^{(n)}(t) dt &= \left[p(t) \chi_n^{(n-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 p'(t) \chi_n^{(n-1)}(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left[p^{(i)}(t) \chi_n^{(n-1-i)}(t) \right]_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen nun sukzessive $p(t) := \varphi_j(t) = t^{j-1}, j = 1, \dots, n$, und erhalten aus der obigen Relation für $j = 1$ zunächst $\chi_n^{(n-1)}(1) = 0$ und für $j = 2, \dots, n$:

$$\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i p^i(1) \chi_n^{(n-1-i)}(1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \chi_n^{(n-k)}(1) = 0, \quad k = 2, \dots, n.$$

Deshalb hat χ_n folgende Form: $\chi_n(t) = c_n(t^2 - 1)^n, \forall t \in [-1, 1]$, mit $c_n \in \mathbb{R}$. Insgesamt sind damit die Polynome

$$\eta_n(t) := c_n \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n], \forall n \in \mathbb{N}, \text{ orthogonal in } C([-1, 1]).$$

Wir bestimmen jetzt den Normierungsfaktor c_n so, dass $\|\eta_n\| = 1$ und damit $L_n = \eta_n, \|L_n\| = 1$. Mit $\hat{\chi}_n = \frac{1}{c_n} \chi_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 = \|\eta_n\|^2 &= c_n^2 \int_{-1}^1 |\hat{\chi}_n^{(n)}(t)|^2 dt \\ &= c_n^2 \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [\hat{\chi}_n^{(n-1-i)}(t) \hat{\chi}_n^{(n+i)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 \hat{\chi}_n(t) \hat{\chi}_n^{(2n)}(t) dt \right] \\ &= c_n^2 (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 \hat{\chi}_n(t) dt. \end{aligned}$$

Wir setzen $I_n := \int_{-1}^1 \hat{\chi}_n(t) dt, \forall n \in \mathbb{N}$, und berechnen I_n sukzessive:

$$\begin{aligned} I_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt &= \int_{-1}^1 t^2 (t^2 - 1)^{n-1} dt - I_{n-1} \\ &= \left[t \frac{1}{2n} (t^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt - I_{n-1} = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow (1 + \frac{1}{2n}) I_n = -I_{n-1} \rightsquigarrow I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} I_0$$

$$\rightsquigarrow c_n = \left(2(2n)! \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ wegen } I_0 = \int_{-1}^1 1 dt = 2.$$

$$\rightsquigarrow c_n = \left((2n)! \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(2^{n+1} n! \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{2n+1} (2^n n!)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Damit sind die normierten Legendreschen Polynome $L_n, \forall n \in \mathbb{N}$, berechnet und ihre Orthonormiertheit nach Konstruktion gezeigt.

Die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{L_k : k \in \mathbb{N}\}$ in X folgt aus dem Weierstraßschen Approximationsatz, d.h. der Tatsache, dass $\text{span}\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{L_k : k \in \mathbb{N}\}$ dicht in X bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und wegen $\|\cdot\| \leq \sqrt{2} \|\cdot\|_\infty$ auch bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ ist. Die speziellen Formeln für L_0, L_1, L_2 ergeben sich unmittelbar aus der allgemeinen Formel für L_n . \square

Bemerkung 1.22 Analog zum bisher betrachteten Skalarprodukt auf X kann man folgende Verallgemeinerung betrachten. Es sei $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine sog. Gewichtsfunktion mit den Eigenschaften $w(t) > 0, \forall t \in (a, b)$, und $0 < \int_a^b w(t)dt < \infty$. Dann ist durch die Formel

$$\langle x, y \rangle_w := \int_a^b w(t)x(t)y(t)dt, \quad \forall x, y \in X,$$

ein Skalarprodukt definiert. Auch bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ auf X lässt sich mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormierungsverfahren ein Orthonormalsystem von Polynomen bestimmen, das wegen $\| \cdot \|_w \leq \left(\int_a^b w(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \| \cdot \|_\infty$ wieder vollständig ist.

Wichtiger Spezialfall:

$$[a, b] = [-1, 1], \quad w(t) := (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in (-1, 1),$$

und das Orthonormalsystem der (normierten) Tschebychev-Polynome

$$T_0(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos(t)), \quad \forall t \in [-1, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Hämmerlin/Hoffmann, 4.7)

Wir kommen nun zu einigen bemerkenswerten Eigenschaften von Orthonormalsystemen von Polynomen in $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$ (mit einer Gewichtsfunktion w wie in Bem. 1.22).

Satz 1.23 *Es sei $\psi_k \in \mathcal{P}_k, k \geq 0$, ein Orthonormalsystem von Polynomen im Raum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$. Dann gilt:*

- a) *Jedes der Polynome ψ_k hat sämtlich einfache, reelle Nullstellen, die alle in (a, b) liegen.*
- b) *Für das normierte Polynom mit führendem Koeffizienten Eins $\hat{\psi}_k$ (d.h. $\hat{\psi}_k(t) = \frac{1}{c_k} \psi_k(t) = t^k + \dots$) gilt:*

$$\| \hat{\psi}_k \|_w \leq \| p \|_w, \quad \forall p \in \hat{\mathcal{P}}_k := \{ p \in \mathcal{P}_k : p(t) = t^k + q(t), q \in \mathcal{P}_{k-1} \}$$

(Minimaleigenschaft orthogonaler Polynome).

Beweis:

- a) Es seien $t_{k1}, \dots, t_{kk} \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des Polynoms ψ_k , d.h.

$$\psi_k(t) := c_k \prod_{j=1}^k (t - t_{kj}), \quad \forall t \in [a, b], \quad c_k \neq 0.$$

Wegen $\langle \psi_k, \psi_0 \rangle_w = 0$ gilt $\int_a^b \prod_{j=1}^k (t - t_{kj}) w(t) dt = 0$. Folglich muss mindestens eine reelle Nullstelle in (a, b) mit ungeradzahlgiger Vielfachheit (d.h. mit Vorzeichenwechsel) existieren. Es sei nun $\{ t_{kj} : j \in H \subset \{1, \dots, k\} \}$ die Menge aller

reellen Nullstellen ungeradzahlicher Vielfachheit von ψ_k in (a, b) . In H soll jede mehrfache Nullstelle nur einmal auftreten. Wir betrachten die Funktion

$$\tilde{p}(t) := \prod_{j \in H} (t - t_{kj}), \forall t \in [a, b].$$

Dann gilt: $\psi_k(t)\tilde{p}(t) \geq 0$ oder $\psi_k(t)\tilde{p}(t) \leq 0, \forall t \in (a, b)$, und damit

$$\langle \psi_k, \tilde{p} \rangle_w \neq 0.$$

Wegen $\langle \psi_k, p \rangle_w = 0, \forall p \in \mathcal{P}_{k-1}$, muss \tilde{p} ein Polynom k -ten Grades sein, d.h. $H = \{1, \dots, k\}$ gelten. Damit ist a) bewiesen.

- b) Wir betrachten die Funktion $x(t) := t^k, \forall t \in [a, b]$. Das eindeutig bestimmte Proximum an x aus \mathcal{P}_{k-1} werde mit \tilde{p} bezeichnet (Folgerung 1.11). Nach Folgerung 1.15 müssen die Normalgleichungen erfüllt sein:

$$\langle x - \tilde{p}, \psi_i \rangle_w = 0, i = 0, \dots, k-1.$$

D.h. $x - \tilde{p} \in \mathcal{P}_k$ ist orthogonal zu allen Elementen aus \mathcal{P}_{k-1} . Also muss $x - \tilde{p}$ ein Vielfaches von ψ_k sein. Da $x - \tilde{p}$ als führenden Koeffizienten Eins besitzt, gilt: $\hat{\psi}_k = x - \tilde{p}$, d.h. $\tilde{p} = x - \hat{\psi}_k$ und $\|\hat{\psi}_k\|_w = \inf_{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{k-1}} \|x - \tilde{p}\|_w \leq \|p\|_w, \forall p \in \hat{\mathcal{P}}_k. \square$

Satz 1.24 *Es sei $\psi_k \in \mathcal{P}_k, k \geq 0$, ein Orthonormalsystem von Polynomen im Raum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$. Dann gilt die folgende Rekursionsformel:*

$$\psi_{k+1}(t) = (\alpha_k t + \beta_k) \psi_k(t) + \gamma_k \psi_{k-1}(t), \forall t \in [a, b], \forall k \in \mathbb{N},$$

wobei $\alpha_k := \frac{a_{k+1}}{a_k}, \beta_k := \frac{a_{k+1}}{a_k} \left(\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{b_k}{a_k} \right), \gamma_k := -\frac{a_{k+1} a_{k-1}}{a_k^2}, \forall k \in \mathbb{N},$

$$\psi_k(t) = a_k t^k + b_k t^{k-1} + p(t), p \in \mathcal{P}_{k-2}, \forall k \geq 0.$$

Beweis: Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Dann gilt nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} - \alpha_k t \psi_k &=: p_k \in \mathcal{P}_k \\ \rightsquigarrow p_k &= \sum_{j=0}^k \langle p_k, \psi_j \rangle_w \psi_j \quad (\text{vgl. Folgerung 1.17}) \\ &= \sum_{j=0}^k \left[\langle \psi_{k+1}, \psi_j \rangle_w - \alpha_k \int_a^b w(t) \psi_k(t) t \psi_j(t) dt \right] \psi_j \\ &= -\alpha_k \sum_{j=k-1}^k \left(\int_a^b w(t) \psi_k(t) t \psi_j(t) dt \right) \psi_j. \end{aligned}$$

Dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen wegen der Orthogonalität von ψ_k zu $\mathcal{P}_j, \forall j = 0, \dots, k-1$, für jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit entsteht die folgende Rekursionsformel:

$$\psi_{k+1} = \left[\alpha_k t - \alpha_k \left(\int_a^b w(t) \psi_k^2(t) t dt \right) \right] \psi_k - \alpha_k \left(\int_a^b w(t) \psi_k(t) \psi_{k-1}(t) dt \right) \psi_{k-1}.$$

Setzen wir also (zunächst) $\beta_k := -\alpha_k \int_a^b w(t) \psi_k^2(t) dt$ und

$$\gamma_k := -\alpha_k \int_a^b w(t) \psi_k(t) \psi_{k-1}(t) dt,$$

so ergibt sich die behauptete Rekursion. Jedoch bleiben noch die behaupteten Formeln für β_k und γ_k zu beweisen. Dies beginnen wir mit der Identität nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} t\psi_{k-1} &= \frac{a_{k-1}}{a_k} \psi_k + q_{k-1}, \quad q_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}. \\ \rightsquigarrow \int_a^b w(t) \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) dt &= \frac{a_{k-1}}{a_k} \langle \psi_k, \psi_k \rangle_w = \frac{a_{k-1}}{a_k} \\ \rightsquigarrow -\frac{\gamma_k}{\alpha_k} = \frac{a_{k-1}}{a_k} &\rightsquigarrow \gamma_k = \frac{a_{k+1} a_{k-1}}{a_k^2} \end{aligned}$$

Es genügt also, die Formel für β_k zu verifizieren. Dazu vergleichen wir in der Rekursion die Koeffizienten von t^k auf beiden Seiten der Gleichheit. Es ergibt sich

$$b_{k+1} = \alpha_k b_k + \beta_k a_k \quad \text{oder} \quad \beta_k = \frac{1}{a_k} (b_{k+1} - \alpha_k b_k).$$

Letzteres ist aber die behauptete Identität. \square

Beispiel 1.25 (Rekursion für Legendre-Polynome)

Es sei $[a, b] = [-1, 1]$, $w(t) \equiv 1$. Nach Satz 1.21 hat das Orthonormalsystem folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \psi_k(t) = L_k(t) &= \frac{1}{2^k k!} \sqrt{k + \frac{1}{2}} \frac{d^k}{dt^k} [t^{2k} + q_{2k-2}(t)], \quad q_{2k-2} \in \mathcal{P}_{2k-2}, \\ &= \frac{1}{2^k k!} \sqrt{k + \frac{1}{2}} \left[\frac{(2k)!}{k!} t^k + q_{k-2}(t) \right], \quad q_{k-2} \in \mathcal{P}_{k-2}, \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow a_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} \sqrt{k + \frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad b_k = 0 \rightsquigarrow \beta_k = 0.$$

$$\begin{aligned} \alpha_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(2(k+1))! \sqrt{k+1+\frac{1}{2}} 2^k k!}{2^{k+1} ((k+1)!)^2 \sqrt{k+\frac{1}{2}} (2k)!} = \frac{(2k+2)(2k+1) \sqrt{k+\frac{3}{2}}}{2(k+1)^2 \sqrt{k+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2k+1}{k+1} \sqrt{\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\gamma_k = -\alpha_k \frac{a_{k-1}}{a_k} = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = -\frac{2k+1}{k+1} \sqrt{\frac{2k+3}{2k+1}} \cdot \frac{k}{2k-1} \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}} = -\frac{k}{k+1} \sqrt{\frac{k+\frac{3}{2}}{k-\frac{1}{2}}}$$

$$\rightsquigarrow L_{k+1}(t) = \frac{2k+1}{k+1} \sqrt{\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}} t L_k(t) - \frac{k}{k+1} \sqrt{\frac{k+\frac{3}{2}}{k+\frac{1}{2}}} L_{k-1}(t), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Satz 1.26 *Es sei $\psi_k \in \mathcal{P}_k, k \geq 0$, ein vollständiges Orthogonalsystem von Polynomen in $X, \langle \cdot, \cdot \rangle_w$. Dann existiert für jedes $x \in X$ genau ein Proximum $p_k \in \mathcal{P}_k$ an x und es gilt:*

$$p_k = \sum_{j=1}^k \langle x, \psi_j \rangle_w \psi_j \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - p_k\|_w = 0.$$

Beweis: folgt aus 1.17 und 1.19. □

Die Aussage liefert Konvergenz im gewichteten quadratischen Mittel (d.h. bzgl. $\|\cdot\|_w$), aber i.a. nicht die gleichmäßige Konvergenz. Unter stärkeren Voraussetzungen an x ist auch die gleichmäßige Konvergenz beweisbar (vgl. Isaacson/Keller, Kap. 5.3.4), allerdings ist die Konvergenz "langsam".

1.3 Gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen

Wir betrachten den linearen normierten Raum $X := C([a, b])$ mit der Tschebychev-Norm $\|\cdot\|_\infty$ (vgl. Beispiel 1.12b)). Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X$ linear unabhängig und es sei $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Obwohl unsere Hauptanwendung in diesem Kapitel der Fall $V = \mathcal{P}_{n-1}$, d.h. die Approximation durch Polynome ist, sollen die wesentlichen Ergebnisse in einem allgemeineren Kontext bewiesen werden.

Zunächst ist nach Satz 1.4 klar, dass das Proximum an jedes $x \in X$ aus V existiert. Unser Ziel ist, notwendige und hinreichende Bedingungen für Proxima herzuleiten und einen Eindeutigkeitssatz zu beweisen. Wir beginnen mit einer allgemeinen Aussage, die zunächst auch ohne die Endlichdimensionalität von V auskommt.

Satz 1.27 *Es sei V ein linearer Teilraum von X und es seien $x \in X$ bzw. $v \in V$. Dann ist v Proximum an x aus V gdw. kein $w \in V$ existiert mit*

$$(x(t) - v(t))w(t) > 0, \forall t \in M := \{t \in [a, b] : |x(t) - v(t)| = \|x - v\|_\infty\}.$$

Beweis:

(\Leftarrow) *Annahme:* v ist kein Proximum an x aus V .

Dann existiert ein $\tilde{v} \in V$ mit $\tilde{v} \neq v$, so dass

$$\|x - (v + \tilde{v})\|_\infty < \|x - v\|_\infty = |x(t) - v(t)|, \forall t \in M.$$

\leadsto $|x(t) - (v(t) + \tilde{v}(t))| < |x(t) - v(t)|, \forall t \in M.$

\leadsto für alle $t \in M$ müssen $x(t) - v(t)$ und $\tilde{v}(t)$ das gleiche Vorzeichen besitzen.

Also gilt $(x(t) - v(t))\tilde{v}(t) > 0, \forall t \in M.$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(\Rightarrow) Es sei nun v ein Proximum an x aus V .

Annahme: $\exists w \in V$ mit $(x(t) - v(t))w(t) > 0, \forall t \in M.$

O.B.d.A. gelte $\|w\|_\infty \leq 1$, ansonsten betrachten wir $\frac{w}{\|w\|_\infty} \in V$.

Wir definieren $M' := \{t \in [a, b] : d(t)w(t) \leq 0\}$ und

$$\Delta := \begin{cases} \max_{t \in M'} |d(t)| & , \text{ falls } M' \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ falls } M' = \emptyset \end{cases}, \text{ wobei } d := x - v.$$

Da M' abgeschlossen ist und $M' \cap M = \emptyset$ gilt, folgt:

$$0 \leq \Delta < \|d\|_\infty.$$

Wir definieren $\Theta := \frac{1}{2}(\|d\|_\infty - \Delta)$ und haben $\Theta \in (0, \frac{1}{2}\|d\|_\infty]$.

Es sei nun $\xi \in [a, b]$ so gewählt, dass $|d(\xi) - \Theta w(\xi)| = \|d - \Theta w\|_\infty.$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

$$\begin{aligned} (1) \quad \xi \in M' & : \|d - \Theta w\|_\infty \leq |d(\xi)| + \Theta|w(\xi)| \leq \Delta + \Theta = \\ & = \frac{1}{2}(\|d\|_\infty + \Delta) < \|d\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \xi \notin M' & : \|d - \Theta w\|_\infty = |d(\xi) - \Theta w(\xi)| < \max\{|d(\xi)|, \Theta|w(\xi)|\} \\ & \leq \max\{\|d\|_\infty, \Theta\} = \|d\|_\infty \end{aligned}$$

(dabei wurde bei der Abschätzung " < " die Eigenschaft $d(\xi)w(\xi) > 0$ wesentlich verwendet). In beiden Fällen ergibt sich also:

$$\|x - (v + \Theta w)\|_\infty = \|d - \Theta w\|_\infty < \|d\|_\infty = \|x - v\|_\infty.$$

Wegen $v + \Theta w \in V$ ist also v kein Proximum an x aus V und die Annahme muss falsch sein. \square

Unser Ziel ist nun für die i.a. schwer nachprüfbare Bedingung in Satz 1.27 verifizierbare notwendige und hinreichende Bedingungen in spezielleren linearen Teilräumen V von X zu finden. Der entscheidende Begriff ist dabei der sog. *Haarsche Raum*.

Definition 1.28 $V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset X$ heisst Haarscher Raum auf $[a, b]$, falls jedes $v \in V \setminus \{0\}$ in $[a, b]$ höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen besitzt. Ist $V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Haarscher Raum auf $[a, b]$, so nennt man $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ Tschebychev-System auf $[a, b]$.

Satz 1.29 Es sei $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Haarscher Raum auf $[a, b]$ und gegeben seien n Paare $(t_j, x_j) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, mit paarweise verschiedenen Stützstellen $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$. Dann existiert genau ein $v \in V$ mit $v(t_j) = x_j$, $\forall j = 1, \dots, n$.

Beweis: Ein Element $v = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in V$ erfüllt die Bedingungen $v(t_j) = x_j$, $j = 1, \dots, n$,

gdw. das lineare Gleichungssystem $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t_j) = x_j$, $j = 1, \dots, n$, genau eine Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Determinante der Matrix $(\varphi_i(t_j))_{i,j=1,\dots,n}$ nicht verschwindet. Wäre aber diese Determinante gleich Null, so würden Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \dots, 0\}$ existieren, so dass $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$ (lineare Abhängigkeit von Zeilen bzw. Spalten).

Also hätte die Funktion $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \in V \setminus \{0\}$ n verschiedene Nullstellen in $[a, b]$, was nach Voraussetzung unmöglich ist. Also gilt $\det(\varphi_i(t_j))_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$. \square

Beispiel 1.30

- $\varphi_i(t) := t^{i-1}$, $t \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, ist ein Tschebychev-System nach dem Fundamentalsatz der Algebra (und zwar auf jedem Intervall $[a, b]$).
- $\{1, \cos(kt), \sin(kt)\}_{k=1,\dots,m}$ ist ein Tschebychev-System auf $[0, 2\pi]$ mit $n = 2m + 1$. (vgl. Hämmerlin/Hoffmann, Kap. 4.4.2)

Lemma 1.31 Ist $V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Haarscher Raum auf $[a, b]$, ℓ belongs to $\{1, \dots, n - 1\}$ und sind $a < \xi_1 < \dots < \xi_\ell < b$, so existiert eine Funktion $w \in V$, die in den Punkten ξ_j , $j = 1, \dots, \ell$, das Vorzeichen wechselt und keine weiteren Nullstellen in $[a, b]$ besitzt. Außerdem existiert auch eine Funktion in V , die keine Nullstellen in $[a, b]$ besitzt.

Beweis: Für $\ell = n - 1$ lässt sich die Aussage mit Hilfe von Satz 1.29 beweisen. Für den allgemeinen Fall sei auf Powell, Appendix A, verwiesen. \square

Es sei angemerkt, dass die Aussage von Lemma 1.31 für den in Beispiel 1.30 a) diskutierten Fall einfach zu sehen ist. Für allgemeine Haarsche Räume ist die Aussage aber keineswegs trivial.

Definition 1.32 Eine Menge von $n + 1$ Punkten $\{a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \leq b\}$ heißt Alternante für $d = x - v$ mit $x \in X$ und $v \in V$, falls

$$d(t_{j+1}) = -d(t_j), \forall j = 1, \dots, n.$$

Satz 1.33 (Alternantensatz)

Es sei $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Haarscher Raum auf $[a, b]$, $x \in X$ und $v \in V$.

Dann ist v Proximum an x aus V gdw. eine Alternante $\{a \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq b\}$ für $d = x - v$ existiert, so dass $|d(t_j)| = |x(t_j) - v(t_j)| = \|x - v\|_\infty = \|d\|_\infty, \forall j = 1, \dots, n+1$.

Beweis:

(\Leftarrow) Es sei $\{a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \leq b\}$ eine Alternante für $x - v$ mit der Eigenschaft $|x(t_j) - v(t_j)| = \|x - v\|_\infty, \forall j = 1, \dots, n + 1$.

Unser Ziel ist die Anwendung von Satz 1.27. Deshalb machen wir die

Annahme: $\exists w \in V : (x(t) - v(t))w(t) > 0, \forall t \in M$, wobei $M = \{t \in [a, b] : |x(t) - v(t)| = \|x - v\|_\infty\}$.

Insbesondere gilt dann: $(x(t_j) - v(t_j))w(t_j) > 0, \forall j = 1, \dots, n + 1$. Da aber die Differenz $x(t_j) - v(t_j), j = 1, \dots, n + 1$, n -mal das Vorzeichen wechselt, muss dies auch für die $w(t_j), j = 1, \dots, n + 1$, gelten. Dies ist aber nach Voraussetzung $w \in V$ unmöglich.

(\Rightarrow) Es sei v Proximum an x aus V .

Annahme: Es existiert keine Alternante $\{a \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq b\}$ für $x - v$, so dass $|x(t_j) - v(t_j)| = \|x - v\|_\infty, j = 1, \dots, n + 1$.

Also existieren höchstens n Punkte $\{a \leq \tau_1 < \dots < \tau_k \leq b\}$ ($1 \leq k \leq n$), so dass mit $d := x - v$ gilt $|d(\tau_j)| = \|d\|_\infty$ und $\text{sgn } d(\tau_j) = \varepsilon(-1)^j$ für $j = 1, \dots, k$ mit einem $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Ist nun $k = 1$, so ist $\text{sgn } d(t)$ für $t \in M$ konstant. Nach Lemma 1.31 existiert eine Funktion $w \in V$, die keine Nullstellen in $[a, b]$ besitzt und für die $\text{sgn } d(t) = \text{sgn } w(t), \forall t \in M$, und damit $d(t)w(t) > 0, \forall t \in M$, gilt. Nach Satz 1.27 ist dies aber ein Widerspruch (zur Wahl von v).

Ist $k > 1$, so wählen wir sukzessive $\xi_j \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ so, dass $d(\xi_j) = 0$ und $\text{sgn } d(t) = \text{sgn } d(\tau_{j+1}), \forall t \in (\xi_j, \tau_{j+1}), j = 1, \dots, k - 1$. In (τ_j, ξ_j) können dann durchaus noch Elemente aus M liegen, in denen d dasselbe Vorzeichen wie in τ_j besitzt. Wir wenden wieder Lemma 1.31 für $\ell := k - 1$ an und wählen nun eine Funktion w , die in den Punkten ξ_1, \dots, ξ_{k-1} das Vorzeichen wechselt und keine weiteren Nullstellen in $[a, b]$ besitzt. O.B.d.A. nehmen wir noch an, dass $\text{sgn } w(\tau_1) = \text{sgn } d(\tau_1)$ gilt. Nach Konstruktion ist dann klar, dass in jedem Punkt $t \in M$ das Vorzeichen von w und d übereinstimmt, d.h., $w(t)d(t) > 0$ gilt. Nach Satz 1.27 wäre dann v keine Proximum an x aus V . Also muss die Annahme falsch sein. \square

Beispiel 1.34 Es seien $X := C([0, 2\pi])$, $x(t) := \sin(3t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $v := 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M &= \{t \in [0, 2\pi] : |x(t) - v(t)| = \|x - v\|_\infty\} \\ &= \{t \in [0, 2\pi] : |x(t)| = 1\} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Diese Menge M ist eine Alternante für $x - v$.

Es sei $V := \mathcal{P}_{n-1} :=$ Menge aller Polynome vom Grad $\leq n - 1$ auf $[0, 2\pi]$.

Nach Satz 1.33 ist $v = 0$ Proximum an x aus \mathcal{P}_{n-1} gdw. $n + 1 \leq 6$ gdw. $n - 1 \leq 4$! (Dieses Beispiel zeigt auch, dass es i.a. mehr als $n + 1$ Alternantenpunkte in M geben kann!)

Satz 1.35 *Es sei $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset X$ ein Haarscher Raum und $x \in X$. Dann ist das Proximum an x aus V eindeutig bestimmt.*

Beweis: Nach Satz 1.7 ist die Menge aller Proxima an x aus V entweder einelementig oder konvex, abgeschlossen (mit unendlich vielen Elementen).

Annahme: Es existieren 2 Proxima $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2$ an x . Dann ist auch das Element $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ Proximum an x . Nach Satz 1.33 existiert dann eine Alternante $\{a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \leq b\}$ für x und $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, die die *Maximaleigenschaft* hat, d.h., es gilt:

$$x(t_j) - \frac{1}{2}(v_1(t_j) + v_2(t_j)) = \varepsilon(-1)^j \varrho, \quad j = 1, \dots, n + 1, \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

und

$$\varrho = \left\| x - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \right\|_\infty.$$

Also gilt: $\frac{1}{2}(x(t_j) - v_1(t_j)) + \frac{1}{2}(x(t_j) - v_2(t_j)) = \varepsilon(-1)^j \varrho, j = 1, \dots, n + 1$. Andererseits gilt aber auch $|x(t_j) - v_k(t_j)| \leq \|x - v_k\|_\infty = \varrho, k = 1, 2, j = 1, \dots, n + 1$. Deshalb muss $x(t_j) - v_1(t_j) = x(t_j) - v_2(t_j)$, d.h., $v_1(t_j) = v_2(t_j), j = 1, \dots, n + 1$ gelten.

$\leadsto v_1 - v_2 \in V$ hat $n + 1$ Nullstellen in $[a, b]$ $\leadsto v_1 = v_2$. □

Beispiel 1.36 Es seien $X := C([-1, 1])$, $x(t) := t^n, \forall t \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert.

Gesucht: Proximum p_n an x aus \mathcal{P}_{n-1} .

(Eine andere Formulierung der Aufgabenstellung ist analog zu Satz 1.23 b), das Polynom aus \mathcal{P}_n mit Höchstkoeffizient 1 und kleinster $\|\cdot\|_\infty$ -Norm zu finden.)

Ansatz: $p_n(t) := t^n - \frac{1}{2^{n-1}} \hat{T}_n(t), \hat{T}_n(t) := \cos(n \arccos t), \forall t \in [-1, 1]$.

Wegen des Additionstheorems $\cos((n + 1)\theta) + \cos((n - 1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta)$ ist einerseits klar, dass die \hat{T}_n Polynome n -ten Grades sind, und dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\hat{T}_{n+1}(t) = 2t\hat{T}_n(t) - \hat{T}_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \hat{T}_0(t) \equiv 1, \hat{T}_1(t) = t.$$

Dies sind (wieder) die sog. Tschebychev-Polynome (vgl. 1.22, wo sie allerdings anders normiert waren) und die erhaltene Rekursion ist natürlich ein Spezialfall der allgemeinen Aussage 1.24.

Aus der Rekursion ergibt sich ferner, dass der höchste Koeffizient von \hat{T}_n gerade 2^{n-1} ist, dass also $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ gilt. Ferner gilt:

$$\|x - p_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}} = \|\hat{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Nun ist aber $t_j := \cos \frac{j}{n}\pi$, $j = 1, \dots, n+1$, wegen

$$\hat{T}_n(t_j) = \cos j\pi = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

eine Alternante zu $x - p_n$ mit *Maximalabweichung*. Deshalb ist nach Satz 1.33 p_n Proximum an x aus \mathcal{P}_{n-1} .

Bemerkung 1.37 Das Problem der Bestimmung eines Proximums an $x \in X$ aus einem Haarschen Raum $V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ kann als nichtlineares Optimierungsproblem wie folgt formuliert werden:

$$\min \left\{ \max_{t \in [a, b]} |x(t) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)| : c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Solche MinMax-Aufgaben sind äquivalent formulierbar in der Form

$$\min \left\{ r : |x(t) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)| \leq r, \quad \forall t \in [a, b], (r, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \right\}.$$

Dies ist ein sog. *semi-infinites* lineares Optimierungsproblem, d.h., ein Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion, endlichdimensionaler Variable, (aber) unendlich vielen linearen Restriktionen. Für solche Optimierungsprobleme existieren eine spezielle Theorie und spezielle Lösungsverfahren (siehe z.B. Hettich/Zencke und M. A. Goberna, M. A. Lopez: *Linear Semi-Infinite Optimization*, Wiley, Chichester, 1998).

Bemerkung 1.38 (*Austauschverfahren von Remez*)

Das Remez-Verfahren ist ein iterativer Prozess, der ausgehend von einer Startnäherung $\{a \leq t_1^{(0)} < \dots < t_{n+1}^{(0)} \leq b\}$ eine hinreichend gute Näherung für eine Alternante mit Maximalabweichung erzeugt.

Analog zu Satz 1.33 ist klar, dass die Lösung v_0 des Problems

$$\min \left\{ \max_{i=1, \dots, n+1} |x(t_i^{(0)}) - v(t_i^{(0)})| : v \in V \right\}$$

genau in den Punkten $t_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n+1$, eine Alternante mit Maximalabweichung besitzt. Deshalb berechnet sich v_0 und die (unbekannte) Maximalabweichung d_0 aus dem linearen Gleichungssystem

$$x(t_i^{(0)}) - v(t_i^{(0)}) = (-1)^i d_0, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Dann gilt (vgl. Hämmerlin/Hoffmann, Kap. 4.4.5): $|d_0| \leq d_V(x) \leq \|x - v_0\|_\infty$.

Man bestimmt nun $\xi^{(1)} \in [a, b]$ mit $|x(\xi^{(1)}) - v_0(\xi^{(1)})| = \|x - v_0\|_\infty$. Würde $\xi^{(1)} \in \{t_1^{(0)}, \dots, t_{n+1}^{(0)}\}$ gelten, so ist v_0 bereits Proximum an x nach Satz 1.33. Ist dies nicht der

Fall, ersetzt man einen der Punkte aus $\{t_1^{(0)}, \dots, t_{n+1}^{(0)}\}$ durch $\xi^{(1)}$ und erhält eine neue Näherung $\{t_1^{(1)}, \dots, t_{n+1}^{(1)}\}$ für die Alternante. Man verfährt nun wie oben, bestimmt v_1 bzw. d_1 aus dem entsprechenden linearen Gleichungssystem und erhält

$$|d_0| < |d_1| \leq d_V(x) \leq \|x - v_1\|_\infty.$$

Man verfährt nun wie oben und setzt diesen Prozess so lange fort, bis $\|x - v_k\|_\infty - |d_k|$ hinreichend klein ist.

(Literatur: M.J.D. Powell: Approximation Theory and Methods, Cambridge University Press, Cambridge 1981 (1991), Kap. 8 und 9)

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, wann die eindeutig bestimmten Proxima $P_{V_n}(x)$, wobei $V_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Haarscher Raum ist, für jedes $x \in C([a, b])$ und $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen x konvergieren.

Wir erhalten dabei eine Bedingung an die Menge $\text{span}\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ für deren Dichtheit in $C([a, b])$. Das zentrale Resultat ist der sogenannte Satz von Stone-Weierstraß, den wir allgemeiner für den Raum $C(K)$ aller reellen stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ beweisen. Wir beginnen aber mit einer vorbereitenden einfachen Hilfsaussage.

Lemma 1.39 *Es existiert eine Folge (p_n) von Polynomen in $C([0, 1])$, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $v(t) := \sqrt{t}$, $t \in [0, 1]$, konvergiert.*

Beweis: Wir definieren

$$\begin{aligned} p_1(t) &:= 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \text{und rekursiv} \\ p_{n+1}(t) &:= p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Offenbar sind dann alle p_n Polynome.

Wir zeigen: $p_n(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall t \in [0, 1]$,

Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sie sei jetzt für n richtig. Dann gilt $\forall t \in [0, 1]$:

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2) = (\sqrt{t} - p_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))\right).$$

Wegen $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ gilt auch $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$ und damit

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Als Konsequenz erhalten wir $p_{n+1}(t) \geq p_n(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(p_n(t))$ für jedes $t \in [0, 1]$ monoton wachsend und beschränkt. Also ist die Folge (p_n) punktweise konvergent gegen eine Funktion v . Durch Grenzübergang in der Rekursionsformel ergibt sich dann

$$v(t) = v(t) + \frac{1}{2}(t - v(t)^2), \quad \forall t \in [0, 1],$$

und damit $v(t) = \sqrt{t}$, $\forall t \in [0, 1]$. Die stetige Funktion v ist also punktwiser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen. Nach dem Satz von Dini konvergiert deshalb (p_n) gleichmäßig gegen v . \square

Definition 1.40

- a) Ist X eine Algebra (über \mathbb{R}), d.h., eine kommutative Gruppe bzgl. ”+” und ” \cdot ” mit den zugehörigen Distributivgesetzen, so heißt eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq X$ *Teilalgebra* von X , falls für alle $x, y \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}$, auch $x + y \in \mathcal{A}, x \cdot y \in \mathcal{A}$ und $\alpha x \in \mathcal{A}$ gilt.
- b) Es sei \mathcal{A} eine Teilmenge von $C(K)$, wobei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt. Man sagt, \mathcal{A} *trennt* die Punkte von K , falls für alle $t, \tilde{t} \in K$ mit $t \neq \tilde{t}$ eine Funktion $x \in \mathcal{A}$ existiert, so dass

$$x(t) \neq x(\tilde{t}).$$

Die Menge $X = C(K)$ aller stetigen Funktionen von $K \subseteq \mathbb{R}^m$ in \mathbb{R} ist eine Algebra, indem kanonisch definiert wird:

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t), (xy)(t) := x(t)y(t), (\alpha x)(t) = \alpha x(t) \\ (\forall t \in K, \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

Satz 1.41 (*Stone-Weierstraß*)

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und \mathcal{A} eine Teilalgebra von $C(K)$, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von K trennt. Dann ist \mathcal{A} dicht in $C(K)$, d.h. $\bar{\mathcal{A}} = C(K)$.

Beweis: Der Beweis unterteilt sich in 6 Schritte, davon haben 5 vorbereitenden Charakter.

- (1) Behauptung: $x \in \mathcal{A} \Rightarrow |x| \in \bar{\mathcal{A}}$.

Beweis: Es sei $x \in \mathcal{A}$, $a := \|x\|_\infty = \max_{t \in K} |x(t)|$ (o.B.d.A. $a > 0$).

Wir betrachten die in Lemma 1.39 konstruierte Folge (p_n) von Polynomen und definieren

$$y_n(t) := p_n\left(\frac{1}{a^2}x(t)^2\right), \quad \forall t \in K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $y_n \in C(K)$ und $y_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, wegen $x \in \mathcal{A}$.

Nach Lemma 1.39 gilt außerdem

$$\|y_n - \frac{1}{a}|x|\|_\infty = \|p_n\left(\frac{1}{a^2}x(\cdot)^2\right) - \sqrt{\frac{1}{a^2}x(\cdot)^2}\|_\infty \\ \leq \max_{t \in [0,1]} |p_n(t) - \sqrt{t}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit $\frac{|x|}{a} \in \bar{\mathcal{A}}$, woraus $|x| \in \bar{\mathcal{A}}$ folgt (vgl. auch (2)).

- (2) Behauptung: $\bar{\mathcal{A}}$ ist eine Algebra.

Beweis: Seien $x, y \in \bar{\mathcal{A}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann existieren Folgen $(x_n), (y_n)$ in \mathcal{A} mit $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$ und $\|y_n - y\|_\infty \rightarrow 0$.

Dann gilt $x_n + y_n \in \mathcal{A}, x_n y_n \in \mathcal{A}, \alpha x_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, woraus folgt $x_n + y_n \rightarrow x + y$ und $\alpha x_n \rightarrow \alpha x$ in $C(K)$. Damit ergibt sich sofort $x + y \in \bar{\mathcal{A}}$ und $\alpha x \in \bar{\mathcal{A}}$.

Ferner gilt

$$\|x_n y_n - xy\|_\infty \leq \|x_n y_n - x_n y\|_\infty + \|x_n y - xy\|_\infty \\ \leq \|x_n\|_\infty \|y_n - y\|_\infty + \|y\|_\infty \|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0.$$

Also folgt auch $xy \in \bar{\mathcal{A}}$ und $\bar{\mathcal{A}}$ ist eine Teilalgebra von $C(K)$.

(3) Behauptung: Mit $x, y \in \bar{\mathcal{A}}$ gilt auch $\min\{x, y\}, \max\{x, y\} \in \bar{\mathcal{A}}$.

Beweis: Wegen (2) gilt (1) auch für $\bar{\mathcal{A}}$ anstelle von \mathcal{A} . Wegen der elementaren Beziehungen

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \quad \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

folgt dann sofort aus (2) und (1) die Aussage.

(4) Behauptung: Für alle $t, \tilde{t} \in K$ mit $t \neq \tilde{t}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathcal{A}$ mit $x(t) = \alpha, x(\tilde{t}) = \beta$.

Beweis: Da \mathcal{A} nach Voraussetzung die Punkte von K trennt, existiert ein $y \in \mathcal{A}$ mit $y(t) \neq y(\tilde{t})$. Wir betrachten die Funktion $x \in C(K)$

$$x(s) := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{y(\tilde{t}) - y(t)}(y(s) - y(t)), \quad \forall s \in K, \forall t \in K.$$

Da \mathcal{A} eine Algebra ist und die konstanten Funktionen zu \mathcal{A} gehören, gilt $x \in \mathcal{A}$. Der Rest der Aussage ist klar.

(5) Behauptung: Für alle $x \in C(K), \bar{t} \in K$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $y \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $y(\bar{t}) = x(\bar{t})$ und $y(t) \leq x(t) + \varepsilon, \forall t \in K$.

Beweis: Es seien $x \in C(K), \bar{t} \in K$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.

Wegen (4) können wir für jedes $s \in K$ ein $h_s \in \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften $h_s(\bar{t}) = x(\bar{t})$ und $h_s(s) \leq x(s) + \frac{\varepsilon}{2}$ wählen. Da x und h_s stetig sind, existiert eine offene Umgebung U_s von s , so dass

$$h_s(t) \leq x(t) + \varepsilon, \quad \forall t \in U_s.$$

Dies führen wir für jedes $s \in K$ durch und erhalten eine offene Überdeckung $(U_s)_{s \in K}$ von K . Da K kompakt ist, existiert nach dem Satz von Heine-Borel eine endliche Teilüberdeckung von K durch die Mengen $U_{s_i}, i = 1, \dots, r$. Wir betrachten nun die folgende Funktion y , die wegen (3) zu $\bar{\mathcal{A}}$ gehört: $y(t) :=$

$$\min_{i=1, \dots, r} h_{s_i}(t), \quad \forall t \in K.$$

Es gilt $y(\bar{t}) = \min_{i=1, \dots, r} h_{s_i}(\bar{t}) = x(\bar{t})$, und für jedes $t \in K$ existiert ein $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ mit $t \in U_{s_{i_0}}$ und damit

$$y(t) \leq h_{s_{i_0}}(t) \leq x(t) + \varepsilon.$$

(6) Behauptung: \mathcal{A} ist dicht in $C(K)$.

Beweis: Es seien $x \in C(K)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach (5) existiert für jedes $s \in K$ eine Funktion $y_s \in \bar{\mathcal{A}}$, so dass

$$y_s(s) = x(s) \quad \text{und} \quad y_s(t) \leq x(t) + \varepsilon, \quad \forall t \in K.$$

Für jedes $s \in K$ existiert nun wegen der Stetigkeit von y_s und x eine offene Umgebung V_s von s , so dass

$$y_s(t) \geq x(t) - \varepsilon, \quad \forall t \in V_s.$$

$(V_s)_{s \in K}$ ist wieder eine offene Überdeckung von K und wir wählen analog zu (5) eine endliche Teilüberdeckung von K durch $V_{s_j}, j = 1, \dots, \ell$, aus. Wir betrachten jetzt die Funktion $y \in C(K)$

$$y(t) := \max_{j=1, \dots, \ell} y_{s_j}(t), \forall t \in K.$$

Wegen (3) gilt wieder $y \in \bar{\mathcal{A}}$ und nach Konstruktion gilt für jedes $t \in K$: $y(t) \geq y_{s_j}(t) \geq x(t) - \varepsilon$ (falls $t \in V_{s_j}$).

Insgesamt haben wir $x(t) - \varepsilon \leq y(t) \leq x(t) + \varepsilon, \forall t \in K$, d.h.

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in K.$$

Daraus folgt $\|x - y\|_\infty \leq \varepsilon$ und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $x \in \bar{\mathcal{A}}$. D.h. $C(K) = \bar{\mathcal{A}}$. \square

Folgerung 1.42 *Es seien $\varphi_i \in C(K), i \in \mathbb{N}, V_n := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, n \in \mathbb{N}$ Haarsche Räume und $\mathcal{A} := \text{span}\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ sei eine Teilalgebra von $C(K)$, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von K trennt. Dann konvergiert für jedes $x \in C(K)$ die Folge der Proxima $P_{V_n}(x)$ an x in $C(K)$ gegen x .*

Beweis: Nach Satz 1.41 existiert zu jedem $x \in C(K)$ eine Folge aus \mathcal{A} , die in $C(K)$ gegen x konvergiert. Diese Folge kann wie im Beweis von Satz 1.19 zu einer Folge (v_n) mit $v_n \in V_n, \forall n \in \mathbb{N}$, aufgefüllt werden, ohne dass die Konvergenz verloren geht. Aus der Ungleichung

$$\|x - P_{V_n}(x)\|_\infty \leq \|x - v_n\|_\infty$$

folgt dann die Behauptung. \square

Folgerung 1.43 *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt, so existiert zu jedem $x \in C(K)$ eine Folge von Polynomen, die in $C(K)$ gegen x konvergiert.*

(Für $m = 1, K = [a, b]$ ist dies der klassische Approximationssatz von Weierstraß.)

Beweis: Wir betrachten die folgende Teilmenge \mathcal{A} von $C(K)$:

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{j=0}^n a_j \prod_{i=1}^m t_i^{\alpha_{ij}} : \alpha_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n, i = 1, \dots, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

\mathcal{A} ist offenbar eine Teilalgebra von $C(K)$, die die konstanten Funktionen enthält ($n = 0, \alpha_{i0} = 0, i = 1, \dots, m$).

Außerdem trennt \mathcal{A} die Punkte von K . Sind nämlich $t, \tilde{t} \in K$ mit $t \neq \tilde{t}$, so existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $t_i \neq \tilde{t}_i$. Dann trennt das Polynom $p_i \in \mathcal{A}, p_i(t) = t_i$ ($n = 0, a_0 = 1, \alpha_{ik} = \delta_{ik}, k = 1, \dots, m$) die Punkte t und \tilde{t} .

Also folgt die Aussage aus Satz 1.41. \square

Bemerkung 1.44 Der klassische Approximationssatz von Weierstraß lässt sich auch konstruktiv beweisen. Für $x \in C([0, 1])$ gilt für die sog. Bernstein-Polynome (zu x)

$$B_n(t; x) := \sum_{j=0}^n x\left(\frac{j}{n}\right) B_{n,j}(t), \quad B_{n,j}(t) := \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad t \in [0, 1],$$

die Fehlerabschätzung

$$\max_{t \in [0,1]} |x(t) - B_n(t; x)| \leq \frac{9}{4} \omega(x; n^{-\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei $\omega(x; h) := \sup\{|x(t) - x(\tilde{t})| : |t - \tilde{t}| \leq h, t, \tilde{t} \in [0, 1]\}$ der sog. Stetigkeitsmodul von x ist (Literatur: Isaacson/Keller: Analyse numerischer Verfahren, Edition Leipzig 1972, Kap. 5.1). Da x auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(x; h) = 0$ und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - B_n(\cdot; x)\|_\infty = 0.$$

Jedoch ist die Konvergenz i.a. langsam! Ist x Lipschitzstetig, so ist die Konvergenzordnung $O(n^{-\frac{1}{2}})$; selbst im Fall $x \in C^\infty$ ist sie höchstens $O(n^{-2})$.

Z.B. benötigt man im Fall $x(t) := t^2$ für eine Genauigkeit von 10^{-4} bereits $n = 2500$ (vgl. Powell, Kap. 6.3), da $\|x - B_n(\cdot; x)\|_\infty = \frac{1}{4n}$.

Mit Bemerkung 1.44 entsteht die Frage, ob die metrische Projektion $P_{V_n}(x)$ für $V_n := \mathcal{P}_{n-1}$ eventuell schneller und wie schnell konvergiert.

Satz 1.45 (*Jackson*)

Es sei $x \in C^r([a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n - 1 > r$.

Dann existiert eine (nur von r) abhängige Konstante $C_r > 0$, so dass

$$d(x, V_n) \leq C_r \left(\frac{b-a}{n-1}\right) \omega\left(x^{(r)}; \frac{b-a}{2(n-1-r)}\right),$$

wobei $\omega(x^{(r)}; \cdot)$ wieder den Stetigkeitsmodul von $x^{(r)}$ bezeichnet.

Beweis: Sukzessives Anwenden einer direkt zu beweisenden Aussage für den Fall $r = 0$, vgl. I.P. Natanson: Konstruktive Funktionentheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1995, Kap. VI.2.

Bemerkung 1.46 Für den Fall $r = 0$ liefert Satz 1.45 ein bereits besseres Resultat als die Abschätzung für die Bernstein-Polynome in 1.44. Die klassischen Beweise von Jackson (vgl. auch Natanson oder Powell, Kap 16) beruhen darauf, zunächst Aussagen für Räume von trigonometrischen Polynomen zu beweisen und dies dann auf algebraische Polynome anzuwenden. Die Konstante C_r wächst exponentiell mit $r!$ Inzwischen sind *scharfe* Konstanten für viele r bekannt.

1.4 Polynom-Interpolation stetiger Funktionen

Wir betrachten wieder $X := C([a, b])$ mit der Tschebychev-Norm $\|\cdot\|_\infty$. Es sei $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ ein System linearer unabhängiger Elemente und $(\{a \leq t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} < b\})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stützstellen in $[a, b]$. Wir setzen voraus, dass $V_n := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Haarscher Raum ist und bezeichnen mit P_n die Abbildung von X in X , die jedem Element $x \in X$ die nach Satz 1.29 eindeutig bestimmte Funktion $P_n x \in V_n$ mit $P_n x(t_i^{(n)}) = x(t_i^{(n)})$, $i = 1, \dots, n$, zuordnet.

Lemma 1.47 *Für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt mit den obigen Bezeichnungen*

$$d(x, V_n) \leq \|x - P_n x\| \leq (1 + \|P_n\|)d(x, V_n),$$

wobei $\|P_n\|$ die Norm des linearen Operators P_n bezeichnet, d.h.,

$$\|P_n\| := \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|P_n x\|_\infty.$$

Beweis: Es sei $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V_n$ beliebig gewählt. Dann gilt $v = P_n v$, da V_n ein Haarscher Raum ist. Also folgt

$$x - P_n x = (I - P_n)x = (I - P_n)(x - v)$$

$$\leadsto d(x, V_n) \leq \|x - P_n x\|_\infty \leq \|I - P_n\| \|x - v\|_\infty \leq (1 + \|P_n\|)\|x - v\|_\infty.$$

Durch Infimumbildung über v erhalten wir die gewünschte Ungleichung. \square

Lemma 1.47 besagt, dass die Interpolierende zu einer stetigen Funktion und einem Haarschen Raum höchstens um den Faktor $1 + \|P_n\|$ 'schlechter' ist als das Proximum an x aus V_n . Eine Abschätzung für $\|P_n\|$, die insbesondere die Abhängigkeit von den Stützstellen deutlich macht, wäre deshalb wichtig. Insbesondere trifft dies auf Konvergenzfragen für Interpolierende zu, wenn bereits $d(x, V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\forall x \in X$, bekannt ist. Wir wenden uns dieser Fragestellung nun für den Fall der Polynom-Interpolation zu, d.h. $\varphi_i(t) := t^{i-1}$, $\forall t \in [a, b]$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$P_n x = \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} x(t_i^{(n)}), \quad \text{wobei} \quad \omega_i^{(n)}(t) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j^{(n)}}{t_i^{(n)} - t_j^{(n)}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Satz 1.48 *Für jedes $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$d(x, V_n) \leq \|x - P_n x\|_\infty \leq (1 + \|\ell_n\|_\infty)d(x, V_n),$$

wobei $\|P_n\| = \|\ell_n\|_\infty$ und $\ell_n := \sum_{i=1}^n |\omega_i^{(n)}|$ die sog. Lebesgue-Funktion ist.

Dabei gilt: $\|\ell_n\|_\infty > \frac{2}{\pi} \log n + \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 3$.

Insbesondere existiert stets eine Funktion $x \in X$, so dass die Folge $(\|x - P_n x\|_\infty)$ nicht gegen Null konvergiert.

Beweis: Für jedes $x \in X$ gilt: $|P_n x(t)| \leq \sum_{i=1}^n |\omega_i^{(n)}(t)| |x(t_i^{(n)})| \leq \|\ell_n\|_\infty \|x\|_\infty$. Also folgt sofort: $\|P_n\| \leq \|\ell_n\|_\infty$.

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, wählen wir $t_0 \in [a, b]$ so, dass

$$\|\ell_n\|_\infty = \sum_{i=1}^n |\omega_i^{(n)}(t_0)|.$$

Es sei nun $\bar{x} \in X$ stückweise linear mit $\bar{x}(t_i^{(n)}) := \text{sgn}(\omega_i^{(n)}(t_0))$ und $\bar{x}(a) := 0$ bzw. $\bar{x}(b) := 0$, falls a bzw. b keine Stützstellen sind. Dann gilt: $\|\bar{x}\|_\infty = 1$ und

$$P_n \bar{x}(t_0) = \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)}(t_0) \text{sgn}(\omega_i^{(n)}(t_0)) = \|\ell_n\|_\infty.$$

Also folgt: $\|P_n\| \geq \|P_n \bar{x}\|_\infty \geq \|\ell_n\|_\infty$ und damit die Gleichheit.

Die Abschätzung für $\|\ell_n\|_\infty$ wurde in Kap. 1.3. in T.J. Rivlin, Chebyshev Polynomials, Wiley, New York 1990, gezeigt.

Da also dann die Normen von $P_n, n \in \mathbb{N}$, nicht gleichmäßig beschränkt sind, kann die Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht punktweise konvergent sein (nach dem Satz von Banach-Steinhaus). Damit ist die letzte Aussage bewiesen. \square

Bemerkung 1.49 Da $d(x, V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in X$ wegen des Approximationsatzes von Weierstraß gilt, liefert Satz 1.48 die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Interpolationspolynome $(P_n x)$ gegen x , falls

$$\|\ell_n\|_\infty d(x, V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wir wollen uns im Folgenden mit der Asymptotik der beiden für diese Aussage wichtigen Größen, nämlich $\|\ell_n\|_\infty$ bzw. $d(x, V_n)$, genauer beschäftigen. Wir beginnen jedoch mit der folgenden bemerkenswerten Aussage:

Satz 1.50 *Zu jedem $x \in X$ existiert eine Folge $(\tau^n), \tau^n := \{a \leq t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b\}$ ($n \in \mathbb{N}$), so dass die Folge $(P_n x)$ der zugehörigen Interpolationspolynome in X gegen x konvergiert.*

Beweis: Es sei $v_n \in V_n = \mathcal{P}_{n-1}$ das Proximum an x aus V_n . Nach Satz 1.33 existiert eine Alternante $\{a \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+1} \leq b\}$ für $x - v_n$, so dass

$$|x(\tau_i) - v_n(\tau_i)| = \|x - v_n\|_\infty, i = 1, \dots, n+1.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert deshalb für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $t_i^{(n)} \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, so dass $x(t_i^{(n)}) = v_n(t_i^{(n)})$.

Bezeichnet also $\tau^n := \{a \leq t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b\}$, so ist v_n das Interpolationspolynom von x zu τ^n und die Aussage folgt aus dem Approximationsatz von Weierstraß (bzw. Folgerung 1.43). \square

Leider ist diese Aussage von Marcinkiewicz nicht konstruktiv verwendbar, da diese Stützstellenfolge (τ^n) nur implizit gegeben ist.

Ist nun (τ^n) eine Stützstellenfolge in $[a, b]$ und (ℓ_n) die zugehörige Folge der Lebesgue-Funktionen (vgl. Satz 1.48), so nennen wir $(\Lambda_n(\tau^n)) := (\|\ell_n\|_\infty)$ die zu τ^n gehörige Folge der *Lebesgueschen Zahlen*.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Folge $(\Lambda_n(\tau^n))$ der Lebesgueschen Zahlen in ihrer Asymptotik sehr sensitiv von der Zerlegung τ^n abhängt.

Satz 1.51

a) Für äquidistante Stützstellenfolgen τ_e^n , d.h. $t_i^{(n)} := a + (i-1)h_n$, $i = 1, \dots, n$, mit $h_n := \frac{b-a}{n-1}$ gilt

$$\Lambda_n(\tau_e^n) \geq \frac{2^{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 2).$$

b) Ist τ_T^n die Menge der Nullstellen des Tschebychev-Polynoms n -ter Ordnung (auf $[a, b]$, vgl. 1.36), d.h. $\tau_T^n := \left\{ \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) + \frac{1}{2}(a+b) : j = 1, \dots, n \right\}$, so gilt

$$\Lambda_n(\tau_T^n) < \frac{2}{\pi} \log n + 1 \quad (n \geq 3).$$

Beweis: b) wurde ebenfalls in Kap. 1.3. in T.J. Rivlin (vgl. Ref. in Satz 1.48) gezeigt. Die dortigen Aussagen sind zwar für das Intervall $[-1, 1]$ formuliert, sie bleiben aber für $[a, b]$ gültig, da die Werte von ℓ_n unabhängig von linearen Transformationen sind.

a) Wir schätzen $\|\ell_n\|_\infty$ wie folgt nach unten ab:

$$\begin{aligned} \|\ell_n\|_\infty &\geq \ell_n\left(\frac{1}{2}(t_{n-1}^{(n)} + t_n^{(n)})\right) = \ell_n\left(a + (n-1)h_n - \frac{1}{2}h_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n |\omega_i^{(n)}\left(a + (n-1)h - \frac{1}{2}h\right)| = \sum_{i=1}^n \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(n-j)h_n - \frac{1}{2}h_n}{(i-j)h_n} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left|n - j - \frac{1}{2}\right| \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-i-2)(n-i) \cdots (n-2) \\ &= \frac{1}{4}(n-2)! \left\{ \frac{1}{0!(n-1)!} + \frac{1}{1!(n-1)!(n-3)} + \cdots + \frac{1}{(i-1)!(n-1)!(n-i-1)} + \cdots \right\} \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=i}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)} 2^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Nach Satz 1.51 ist also die Wahl der Nullstellen der Tschebychev-Polynome zur Interpolation nahezu optimal. Die äquidistanten Stützstellen sind dagegen nahezu ungeeignet! Will man also überhaupt Funktionen mit Polynomen höheren Grades interpolieren, so sollte man die Tschebychev-Nullstellen als Stützstellen verwenden. Nach Satz 1.48 bzw. 1.51 ist die Interpolation in diesen Punkten höchstens $2 + \frac{2}{\pi} \log n$ mal schlechter als das Proximum an eine gegebene Funktion.

Folgerung 1.52 Erfüllt $x \in C([a, b])$ die Bedingung $\omega(x; h) \log h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, so konvergiert die mit den Tschebychev-Nullstellen konstruierte Folge von Interpolationspolynomen gleichmäßig in $[a, b]$ gegen x .

Beweis: Für $r = 0$ und $n \geq 2$ gilt nach Satz 1.45: $d(x, V_n) \leq C_0 \omega(x, \frac{b-a}{2(n-1)})$. Nach Satz 1.48 und Satz 1.51 gilt ferner:

$$\begin{aligned} \|x - P_n x\|_\infty &\leq (1 + \|\ell_n\|_\infty) d(x, V_n) \leq (2 + \frac{2}{\pi} \log n) d(x, V_n) \\ &\leq 2C_0 (1 + \frac{1}{\pi} \log n) \omega(x; \frac{b-a}{2(n-1)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $P_n x \in V_n$ das Interpolationspolynom von x auf der Basis von n Tschebychev-Nullstellen. □

Beispiel 1.53 $[a, b] := [-1, 1]$, $x(t) := |t|$, $\forall t \in [-1, 1]$, $\omega(x; h) \leq h$, $\forall h > 0$. Dann konvergiert nach Folgerung 1.52 die mit den Tschebychev-Nullstellen konstruierte Folge von Interpolationspolynomen gleichmäßig gegen x .

Aber: Mit den äquidistanten Stützstellen $t_i := -1 + \frac{1}{n}(i-1)$, $i = 1, \dots, 2n+1$, konvergiert die Folge von Interpolationspolynomen in *keinem* Punkt aus $[-1, 1] \setminus \{-1, 0, 1\}$ punktweise gegen x ! Überdies kommt es bereits für kleine n zu starken Oszillationen der Interpolationspolynome um die Funktionswerte von x !

Literatur: I.P. Natanson: Konstruktive Funktionentheorie, S. 375 ff.

Anschließend führen wir noch den Begriff der dividierten Differenzen ein und beweisen einige Aussagen, die später benötigt werden.

Definition 1.54 Es seien $f_j \in \mathbb{R}$ und paarweise verschiedene Stützstellen $t_j \in [a, b]$, $j = 1, \dots, n$, gegeben. Die reelle Zahl $[t_1, \dots, t_n]f$ ist dann definiert als der Koeffizient der höchsten t -Potenz des Interpolationspolynoms zu $t_j, f_j, j = 1, \dots, n$, und heißt dividierte Differenz oder Differenzenquotient ($n-1$)-ter Ordnung.

Eigenschaft 1.55

a) $[t_1]f = f_1$, $[t_1, t_2]f = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}$.

b) $[t_1, \dots, t_n]f$ ist unabhängig von der Anordnung der $t_j, j = 1, \dots, n$.

c) $[t_1, \dots, t_n]f = \frac{[t_2, \dots, t_n]f - [t_1, \dots, t_{n-1}]f}{t_n - t_1}$ (Rekursionsformel).

Beweis:

a) Für $n = 1$ ist das Interpolationspolynom zu t_1, f_1 konstant (d.h. $p(t) \equiv f_1$) und für $n = 2$ ist es linear. Im letzteren Fall hat es die Gestalt

$$p(t) = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) + f_1.$$

$\rightsquigarrow [t_1, t_2]f = \text{Koeffizient von } t = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}$.

b) folgt aus der Definition von $[t_1, \dots, t_n]f$.

c) Es seien r und q Interpolationspolynome $(n-2)$ -ten Grades, so dass $r(t_j) = f_j$, $j = 1, \dots, n-1$, und $q(t_j) = f_j$, $j = 2, \dots, n$. Dann ist

$$p(t) := \frac{t_n - t}{t_n - t_1} r(t) + \frac{t - t_1}{t_n - t_1} q(t)$$

ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades und es gilt $p(t_j) = f_j$, $j = 1, \dots, n$. Deshalb ist der Koeffizient von t^{n-1} in p gerade die dividierte Differenz $[t_1, \dots, t_n]f$. Vergleicht man nun den Koeffizienten von t^{n-1} in p mit dem des Polynoms auf der rechten Seite, so entsteht:

$$\frac{[t_2, \dots, t_n]f}{t_n - t_1} = \frac{[t_1, \dots, t_{n-1}]f}{t_n - t_1}.$$

Damit ist die Rekursionsformel durch Koeffizientenvergleich bewiesen. \square

Lemma 1.56 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(k-1)$ -mal differenzierbar für ein $k \in \mathbb{N}$. Es seien paarweise verschiedene Stützstellen $t_j \in [a, b]$, $j = 1, \dots, k$, gegeben und es sei $f_j := f(t_j)$, $j = 1, \dots, k$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $[t_1, \dots, t_k]f = \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(\xi)$.

Beweis: Es sei p das Interpolationspolynom zu t_j, f_j , $j = 1, \dots, k$, und wir betrachten die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g := f - p$.

g ist nach Voraussetzung $(k-1)$ -mal differenzierbar und es gilt $g(t_j) = 0$, $j = 1, \dots, k$.

Für $k = 1$ folgt die Aussage mit $\xi := t_1$ und für $k > 1$ fahren wir wie folgt fort:

Nach dem Satz von Rolle besitzt g' mindestens $k-1$ Nullstellen in (a, b) (jeweils zwischen den Nullstellen von g , d.h., den Stützstellen). Durch sukzessives Anwenden dieses Arguments erhalten wir, dass g'' mindestens $k-2$ Nullstellen in (a, b) und $g^{(k-1)}$ mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$ besitzt.

Da $[t_1, \dots, t_k]f$ der Koeffizient von t^{k-1} in p ist, gilt die Formel

$$g^{(k-1)} = f^{(k-1)} - p^{(k-1)} = f^{(k-1)} - (k-1)! [t_1, \dots, t_k]f$$

und wir erhalten die gewünschte Aussage

$$0 = g^{(k-1)}(\xi) = f^{(k-1)}(\xi) - (k-1)! [t_1, \dots, t_k]f.$$

\square

Lemma 1.57 Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $t_j \in [a, b]$, $j = 1, \dots, n$, paarweise verschiedene Stützstellen. Dann gilt:

$$[t_1, \dots, t_n](fg) = \sum_{i=1}^n [t_1, \dots, t_i]f [t_i, \dots, t_n]g \quad (\text{Leibniz-Formel}).$$

Beweis: Es seien Pf bzw. Pg die Interpolationspolynome zu $t_j, f(t_j), j = 1, \dots, n$ bzw. $t_j, g(t_j), j = 1, \dots, n$. Unter Verwendung der Newtonschen Gestalt der Interpolationspolynome gilt dann

$$\begin{aligned}
Pf(t) &= \sum_{i=1}^n [t_1, \dots, t_i] f \prod_{r=1}^{i-1} (t - t_r), \quad Pg(t) = \sum_{j=1}^n [t_j, \dots, t_n] g \prod_{s=j+1}^n (t - t_s) \\
\rightsquigarrow (fg)(t_k) &= (Pf)(t_k)(Pg)(t_k) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n [t_1, \dots, t_i] f \prod_{r=1}^{i-1} (t_k - t_r) \right) \left(\sum_{j=1}^n [t_j, \dots, t_n] g \prod_{s=j+1}^n (t_k - t_s) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n [t_1, \dots, t_i] f [t_j, \dots, t_n] g \prod_{r=1}^{i-1} (t_k - t_r) \prod_{s=j+1}^n (t_k - t_s) \\
&= \sum_{i \leq j} + \sum_{i > j}.
\end{aligned}$$

Alle Summanden in der Summe $\sum_{i > j}$ enthalten den Faktor $\prod_{s=1}^n (t_k - t_s) = 0$. Also gilt:

$$(fg)(t_k) = \sum_{i \leq j} [t_1, \dots, t_i] f [t_j, \dots, t_n] g \left\{ \prod_{r=1}^{i-1} (t - t_r) \prod_{s=j+1}^n (t - t_s) \right\} \Big|_{t=t_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die rechte Seite dieser Identität gehört, als Funktion von t betrachtet, zu $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ und interpoliert fg in den Stützstellen $t_k, k = 1, \dots, n$. Deshalb muss nach Definition 1.54 folgendes gelten:

$$\begin{aligned}
[t_1, \dots, t_n](fg) &= \text{Koeffizient der höchsten } t\text{-Potenz in } \sum_{i \leq j} \\
&= \text{Koeffizient von } t^{n-1} \text{ in } \sum_{i \leq j} \\
&= \text{Koeffizient von } t^{n-1} \text{ in } \sum_{i=j}^n \\
&= \text{Koeffizient von } t^{n-1} \text{ in } \sum_{i=1}^n [t_1, \dots, t_i] f [t_i, \dots, t_n] g \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n (t - t_r) \\
&= \sum_{i=1}^n [t_1, \dots, t_i] f [t_i, \dots, t_n] g.
\end{aligned}$$

□

2 Splines

2.1 B-Splines und Splineräume

Da Polynome höheren Grades zur Interpolation i.a. wenig geeignet erscheinen, ergibt sich die natürliche Idee, stückweise polynomiale Funktionen (niederen Grades) zur Interpolation bzw. Approximation von stetigen Funktionen zu benutzen. Wir beginnen mit der Konstruktion geeigneter Teilräume bzw. Basisfunktionen von Räumen stetiger Funktionen.

Dazu sei eine unendliche Menge $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$ von paarweise verschiedenen Knoten in \mathbb{R} gegeben, für die $t_i < t_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}$, und $t_i \rightarrow -\infty$ für $i \rightarrow -\infty$ und $t_i \rightarrow +\infty$ für $i \rightarrow +\infty$ gilt.

Definition 2.1 Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ heißt die Funktion $B_{ki} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$B_{ki}(x) := (t_{i+k+1} - t_i) [t_i, \dots, t_{i+k+1}] [\cdot - x]_+^k, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

B-Spline der Ordnung k zum Knoten $i \in \mathbb{Z}$.

(Hierbei ist $[t_i, \dots, t_{i+k+1}]$ die dividierte Differenz der Ordnung $(k+1)$ -ter Ordnung; sie wird gebildet von der Funktion $t \mapsto [t - x]_+^k (t \in \mathbb{R})$, wobei $[u]_+ := \max\{u, 0\}, \forall u \in \mathbb{R}$.)

Beispiel 2.2 B-Splines der Ordnung $k = 1$ bzw. lineare B-Splines:

$$\begin{aligned} B_{1i}(x) &= (t_{i+2} - t_i) [t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] [\cdot - x]_+ \\ &= ([t_{i+1}, t_{i+2}] - [t_i, t_{i+1}]) [\cdot - x]_+ \quad (\text{vgl. 1.45c}) \\ &= \frac{[t_{i+2} - x]_+ - [t_{i+1} - x]_+}{t_{i+2} - t_{i+1}} - \frac{[t_{i+1} - x]_+ - [t_i - x]_+}{t_{i+1} - t_i} \\ &= \begin{cases} 0 & , x < t_i \\ \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} - \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} & , x \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} & , x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & , x \geq t_{i+2} \end{cases} \end{aligned}$$

Lemma 2.3 Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt für B-Splines der Ordnung k :

- $B_{ki}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [t_i, t_{i+k+1}), \forall i \in \mathbb{Z}$;
- $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{ki}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $q_k(t; x) := [t - x]_+^k, \forall t, x \in \mathbb{R}$.

- Wegen $q_k(t; x) = 0, \forall t \leq x$, gilt $B_{ki}(x) = 0, \forall x \geq t_{i+k+1}$.
Für $x < t_i$ ist $q_k(\cdot; x)$ ein Polynom k -ten Grades in $[t_i, t_{i+k+1}]$. Nach Lemma 1.56 existiert deshalb ein $\xi \in (t_i, t_{i+k+1})$, so dass

$$B_{ki}(x) = \frac{t_{i+k+1} - t_i}{(k+1)!} q_k^{k+1}(\xi; x) = 0, \quad \text{da } q_k(\cdot; x) \in \mathcal{P}_k.$$

b) Aus der Rekursionsformel 1.55c) für dividierte Differenzen folgt:

$$B_{ki}(x) = ([t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}] - [t_i, \dots, t_{i+k}])q_k(\cdot; x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt $\rightsquigarrow \exists j \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [t_j, t_{j+1})$. Aus a) folgt:
 $B_{ki}(x) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$ mit $i \geq j + 1$ und $i + k + 1 \leq j$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{ki}(x) &= \sum_{i=j-k}^j B_{ki}(x) = \sum_{i=j-k}^j ([t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}] - [t_i, \dots, t_{i+k}])q_k(\cdot; x) \\ &= ([t_{j+1}, \dots, t_{j+k+1}] - [t_{j-k}, \dots, t_j])q_k(\cdot; x) \\ &= [t_{j+1}, \dots, t_{j+k+1}]q_k(\cdot; x), \quad \text{da } x \geq t_j. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.56 existiert nun ein $\xi \in (t_{j+1}, t_{j+k+1})$, so dass

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{ki}(x) = \frac{1}{k!} q_k^{(k)}(\xi; x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t-x)^k \Big|_{t=\xi} = 1.$$

□

Satz 2.4 (Rekursionsformel)

$$B_{ki}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{k-1,i}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{k-1,i+1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Beweis:

Wir bezeichnen $\tilde{B}_{ki}(x) := [t_i, \dots, t_{i+k+1}][\cdot - x]_+^k, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}$, und verwenden die Beziehung

$$[t - x]_+^k = (t - x)[t - x]_+^{k-1}, \quad \forall t, x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(Hierbei wird $0^0 := 0$ gesetzt.)

Mit Hilfe der Leibniz-Formel aus Lemma 1.57 erhalten wir für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ki}(x) &= [t_i, \dots, t_{i+k+1}](\cdot - x)[\cdot - x]_+^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} [t_i, \dots, t_{i+j}](\cdot - x)[t_{i+j}, \dots, t_{i+k+1}][\cdot - x]_+^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^1 [t_i, \dots, t_{i+j}](\cdot - x)[t_{i+j}, \dots, t_{i+k+1}][\cdot - x]_+^{k-1} \\ &\quad (\text{da } [t_i, \dots, t_{i+j}](\cdot - x) = 0 \text{ falls } j \geq 2) \\ &= (t_i - x)[t_i, \dots, t_{i+k+1}][\cdot - x]_+^{k-1} + \underbrace{[t_i, t_{i+1}](\cdot - x)}_{=1} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}][\cdot - x]_+^{k-1} \\ &= (t_i - x) \frac{[t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}] - [t_i, \dots, t_{i+k}]}{t_{i+k+1} - t_i} [\cdot - x]_+^{k-1} + \tilde{B}_{k-1,i+1}(x) \\ &= \frac{t_i - x}{t_{i+k+1} - t_i} (\tilde{B}_{k-1,i+1}(x) - \tilde{B}_{k-1,i}(x)) + \tilde{B}_{k-1,i+1}(x) \\ &= \frac{1}{t_{i+k+1} - t_i} \{ (x - t_i) \tilde{B}_{k-1,i}(x) + [(t_{i+k+1} - t_i) + (t_i - x)] \tilde{B}_{k-1,i+1}(x) \} \\ \rightsquigarrow B_{ki}(x) &= (t_{i+k+1} - t_i) \tilde{B}_{ki}(x) = (x - t_i) \tilde{B}_{k-1,i}(x) + (t_{i+k+1} - x) \tilde{B}_{k-1,i+1}(x) \\ &= \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{k-1,i}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{k-1,i+1}(x). \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.5 Es gilt: $B_{ki}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Nach Lemma 2.3a) genügt es, zu zeigen: $B_{ki}(x) \geq 0, \forall x \in [t_i, t_{i+k+1})$ und $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall i \in \mathbb{Z}$. Aus der Rekursionsformel in Satz 2.4 folgt aber, dass dies erfüllt ist, wenn es für $k = 0$ gilt. Wir müssen also zeigen: $B_{0i}(x) \geq 0, \forall x \in [t_i, t_{i+1}), \forall i \in \mathbb{Z}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} B_{0i}(x) &= (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}][\cdot - x]_+^0 \\ &= [t_{i+1} - x]_+^0 - [t_i - x]_+^0 = 1 - 0 = 1, \quad \forall x \in [t_i, t_{i+1}). \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.6 (B -Splines der Ordnung $k = 2, 3$)

$k = 2$: Quadratische B -Splines für äquidistante Knoten $t_i = ih, \forall i \in \mathbb{Z}$, wobei $h > 0$ die Schrittweite ist. Aus der Rekursionsformel in 2.4 und Beispiel 2.2 folgt $\forall i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} B_{2i}(x) &= \frac{x-t_i}{2h} B_{1i}(x) + \frac{t_{i+3}-x}{2h} B_{1,i+1}(x), \quad \forall x \in [t_i, t_{i+3}), \text{ und} \\ B_{1i}(x) &= \frac{1}{h} \begin{cases} x - t_i, & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ t_{i+2} - x, & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \end{cases} \\ \rightsquigarrow B_{2i}(x) &= \frac{1}{2h^2} \begin{cases} (x - t_i)^2, & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ (x - t_i)(t_{i+2} - x) + (t_{i+3} - x)(x - t_{i+1}), & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ (t_{i+3} - x)^2, & x \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \end{cases} \\ \rightsquigarrow B_{2i}(x) &= \frac{1}{2h^2} [(x - t_{i+1} + h)(t_{i+1} + h - x) + (t_{i+1} + 2h - x)(x - t_{i+1})] \\ &= \frac{1}{2h^2} [h^2 + 2h(x - t_{i+1}) - 2(x - t_{i+1})^2], \quad \forall x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ \rightsquigarrow B_{2i}(t_{i+1}) &= B_{2i}(t_{i+2}) = \frac{1}{2}, \quad B_{2i}(t_i) = B_{2i}(t_{i+3}) = 0, \\ B'_{2i}(t_{i+1}) &= \frac{1}{h} = -B'_{2i}(t_{i+2}) \quad \text{und} \\ \max_{x \in \mathbb{R}} B_{2i}(x) &= B_{2i}(t_{i+1} + \frac{h}{2}) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$k = 3$: Kubische B -Splines für äquidistante Knoten (vgl. Hämmerlin/Hoffmann, Kap. 6.36)

$$B_{3i}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - t_i)^3, & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ h^3 + 3h^2(x - t_{i+1}) + 3h(x - t_{i+1})^2 - 3(x - t_{i+1})^3, & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ h^3 + 3h^2(t_{i+3} - x) + 3h(t_{i+3} - x)^2 - 3(t_{i+3} - x)^3, & x \in [t_{i+2}, t_{i+3}) \\ (t_{i+4} - x)^3, & x \in [t_{i+3}, t_{i+4}). \end{cases}$$

Es sei nun $[a, b]$ ein gegebenes Intervall und $\Omega_n := \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ sei eine Knotenmenge in $[a, b]$. Wir nehmen nun an, dass Ω_n Teilmenge einer unendlichen Menge $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$ von Knoten wie vor Definition 2.1 ist, und wir betrachten die B -Splines $\{B_{ki} : i \in \mathbb{Z}\}$ ($k \in \mathbb{N}$). Nach Lemma 2.3 gilt nun $B_{ki}(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, falls $i \leq -k - 1$ oder $i \geq n$.

Definition 2.7 Eine Funktion $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom-Spline der Ordnung k , falls sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(i) $s \in C^{k-1}([a, b]);$

(ii) s ist ein Polynom vom Grad $\leq k$ auf jedem Intervall $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$.
 (Hierbei verstehen wir unter $C^{-1}([a, b])$ den Raum der auf $[a, b]$ stückweise stetigen Funktionen.)

$S_k(\Omega_n)$ bezeichne die Menge aller Polynom-Splines der Ordnung k auf $[a, b]$. Für $k = 1, 2, 3$ spricht man auch von linearen, quadratischen bzw. kubischen Splines.

Satz 2.8 Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bildet $S_k(\Omega_n)$ einen linearen Raum der Dimension $k + n$, der die B -Splines $B_{ki}, i = -k, \dots, n-1$, (eingeschränkt auf $[a, b]$) enthält.

Beweis: Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig gewählt. Nach Definition 2.1 und der Rekursionsformel für dividierte Differenzen ist B_{ki} eine Linearkombination der Funktionen $\{[t_j - \cdot]_+^k : j = i, \dots, i+k+1\}$. Diese "Stutzfunktionen" gehören aber nach Definition 2.7 zu $S_k(\Omega_n)$ falls $i = -k, \dots, n-1$, und $S_k(\Omega_n)$ ist offensichtlich ein linearer Raum. Damit gehören auch die B -Splines $B_{ki}, i = -k, \dots, n-1$, zu $S_k(\Omega_n)$.

Wir zeigen: $\{(\cdot - t_0)^j, [\cdot - t_i]_+^k : j = 0, \dots, k, i = 1, \dots, n-1\}$ ist eine Basis für $S_k(\Omega_n)$. Folglich hat $S_k(\Omega_n)$ die Dimension $k + n$.

Es ist also zu zeigen, dass für jedes $s \in S_k(\Omega_n)$ Koeffizienten $a_j, j = 0, \dots, k$ und $b_i, i = 1, \dots, n-1$, existieren, so dass

$$s(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - t_0)^j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i [x - t_i]_+^k, \quad \forall x \in [a, b].$$

Es sei $I_\ell := [t_0, t_\ell]$, $\ell = 1, \dots, n$. Wir zeigen die eben formulierte Aussage durch Induktion über ℓ , indem wir beweisen, dass für ein beliebiges $s \in S_k(\Omega_n)$ Koeffizienten $a_j, j = 0, \dots, k$ und $b_i, i = 1, \dots, n-1$ existieren, so dass

$$s(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - t_0)^j + \sum_{i=1}^{\ell-1} b_i [x - t_i]_+^k, \quad \forall x \in I_\ell, \quad \forall \ell = 1, \dots, n.$$

Für $\ell = 1$ ist s ein Polynom vom Grad $\leq k$ in $I_1 = [t_0, t_1]$ und folglich in der Form

$$s(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - t_0)^j, \quad \forall x \in I_1, \quad \text{darstellbar.}$$

Also ist die Aussage für $\ell = 1$ richtig. Sie sei jetzt für $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ richtig und wir zeigen sie für $\ell + 1$. Es seien also a_0, \dots, a_k und $b_1, \dots, b_{\ell-1}$ bereits gewählt und wir betrachten die Funktion

$$\varrho(x) := s(x) - \sum_{j=0}^k a_j (x - t_0)^j - \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i [x - t_i]_+^k, \quad \forall x \in I_{\ell+1}.$$

Es gilt $\varrho(x) = 0, \forall x \in I_\ell$ und $\varrho \in C^{k-1}(I_{\ell+1})$.

In $[t_\ell, t_{\ell+1}]$ ist ϱ außerdem ein Polynom vom Grad $\leq k$. Deshalb ist ϱ Lösung des Anfangswertproblems für die Differentialgleichung

$$y^{(k+1)}(x) = 0, \quad y(t_\ell) = y'(t_\ell) = \dots = y^{(k-1)}(t_\ell) = 0.$$

Da eine Anfangsbedingung fehlt, ist die Lösung nur bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt. Es existiert also ein $b_\ell \in \mathbb{R}$, so dass

$$\varrho(x) = -b_\ell [x - t_\ell]_+^k, \quad \forall x \in [t_\ell, t_n].$$

Damit ist die Aussage für $\ell + 1$ richtig. \square

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, dass auch die B -Splines $\{B_{ki} : i = -k, \dots, n-1\}$ eine Basis für $S_k(\Omega_n)$ darstellen.

Lemma 2.9 *Der Spline $s \in S_k(\Omega_n)$ habe die Eigenschaft $s(x) = 0$ für alle $x \in [t_0, t_\sigma] \cup [t_\tau, t_n]$, wobei $0 < \sigma < \tau < n$.*

- a) *Gilt $\tau - \sigma < k + 1$, so folgt $s(x) = 0, \forall x \in (t_\sigma, t_\tau)$.*
- b) *Ist die Anzahl r der Nullstellen von s in (t_σ, t_τ) endlich, so gilt $r \leq \tau - (\sigma + k + 1)$.*

Beweis:

- a) Wegen $s(x) = 0, \forall x \in [t_0, t_\sigma]$, folgt aus dem Beweis von Satz 2.8 die folgende Darstellung für s in $[t_0, t_n]$:

$$s(x) = \sum_{i=\sigma}^{n-1} \beta_i [x - t_i]_+^k, \quad \forall x \in [t_0, t_n].$$

Damit diese Funktion auch die Bedingung $s(x) = 0, \forall x \in [t_\tau, t_{\tau+1}]$, erfüllt, muss also gelten:

$$\sum_{i=\sigma}^{\tau} \beta_i (x - t_i)^k = 0, \quad \forall x \in [t_\tau, t_{\tau+1}].$$

Folglich müssen die Koeffizienten von allen x -Potenzen des Polynoms auf der linken Seite verschwinden, d.h., es muss gelten

$$(*) \quad \sum_{i=\sigma}^{\tau} \beta_i t_i^j = 0, \quad j = 0, \dots, k.$$

Dies sind also $k+1$ Gleichungen für die $\tau - \sigma + 1$ Koeffizienten $\beta_i, i = \sigma, \dots, \tau$. Da die Matrix vom Vandermonde-Typ ist (also Vollrang besitzt!), hat das homogene Gleichungssystem $(*)$ mit $k+1$ Gleichungen und $\tau - \sigma + 1 \leq k+1$ Unbekannten nur die triviale Lösung $\beta_i = 0, i = \sigma, \dots, \tau$.

- b) Ist $k = 1$, so ist s eine stückweise lineare stetige Funktion mit $s(t_\sigma) = s(t_\tau) = 0$. Ist r endlich, so kann s höchstens eine Nullstelle in jedem der Intervalle $[t_j, t_{j+1}], j = \sigma, \dots, \tau - 1$, besitzen. Also muss $r \leq \tau - \sigma - 2$ gelten und die Aussage ist richtig für $k = 1$.

Analog ist klar, dass auch die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer stückweise linearen stetigen Funktion in (t_σ, t_τ) mit $\tau - \sigma - 2$ nach oben beschränkt ist (unabhängig davon, ob einige ihrer linearen Abschnitte identisch gleich 0 sind). Für $k \geq 2$ argumentieren wir nun wie folgt: s hat r Nullstellen in (t_σ, t_τ) und

es gilt $s(t_\sigma) = s(t_\tau) = 0$. Also wechselt s' das Vorzeichen in (t_σ, t_τ) mindestens $(r+1)$ -mal. Da $s'(t_\sigma) = s'(t_\tau) = 0$ gilt, wechselt s'' das Vorzeichen mindestens $(r+2)$ -mal u.s.w. s^{k-1} wechselt das Vorzeichen in (t_σ, t_τ) mindestens $(r+k-1)$ -mal. Da s^{k-1} aber eine stückweise lineare, stetige Funktion darstellt, folgt aus unserer obigen Überlegung

$$r + k - 1 \leq \tau - \sigma - 2$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 2.10 Eine wichtige Schlussfolgerung aus 2.9a) ist, dass kein $s \in S_k(\Omega_n) \setminus \{0\}$ einen Träger haben kann, der in höchstens k Teilintervallen von Ω_n liegt. Also sind die B -Splines der Ordnung k diejenigen Elemente aus $S_k(\Omega_n)$, die den kleinsten Träger besitzen.

Satz 2.11 Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $S_k(\Omega_n) = \text{span}\{B_{ki} : i = -k, \dots, n-1\}$, d.h., die B -Splines bilden eine Basis im Raum der Splines.

Beweis: Nach Satz 2.8 genügt es zu zeigen, dass die $n+k$ Funktionen B_{ki} , $i = -k, \dots, n-1$, linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$s(x) := \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b] = [t_0, t_n],$$

und zeigen, dass diese nur für $\alpha_i = 0$, $i = -k, \dots, n-1$, gelten kann. Dazu führen wir zunächst noch einen weiteren Knoten t_{-k-1} ein und schlussfolgern $s(x) = 0$, $\forall x \in [t_{-k-1}, t_{-k}]$.

Wir wenden nun Lemma 2.9 auf s definiert auf $[t_{-k-1}, t_{n-k-1}]$ mit $\sigma := -k$ und $\tau = 0$ an. Es folgt: $s(x) = 0$, $\forall x \in [t_\sigma, t_\tau] = [t_{-k}, t_0]$ und damit auch $\forall x \in [t_{-k}, t_n]$.

Jetzt gehen wir schrittweise vor und stellen zunächst fest, dass auf dem Teilintervall $[t_{-k}, t_{-k+1}]$ gilt:

$$s(x) = \alpha_{-k} B_{k,-k}(x) = 0, \quad \forall x \in [t_{-k}, t_{-k+1}].$$

Daraus folgt: $\alpha_{-k} = 0$. Auf dem nächsten Teilintervall $[t_{-k+1}, t_{-k+2}]$ entsteht dann die Gleichung $s(x) = \alpha_{-k+1} B_{k,-k+1}(x) = 0$, d.h., $\alpha_{-k+1} = 0$, u.s.w. Wir erhalten also sukzessive, dass alle Koeffizienten α_i , $i = -k, \dots, n-1$, verschwinden müssen. \square

Bemerkung 2.12 Damit lässt sich jeder Polynom-Spline $s \in S_k(\Omega_n)$ der Ordnung k auf dem Intervall $[a, b]$ in der Form

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(x)$$

darstellen. Wir werden später auf die Bestimmung der Koeffizienten α_i im Fall interpolierender Splines eingehen. Diese Darstellung von s bietet eine Reihe von Vorteilen:

- (i) Schnelle Berechnung von Funktionswerten (Ableitungen, Integralen) über Rekursionsformeln für B -Splines (vgl. Satz 2.4);
- (ii) konvexe Restriktionen der Form $g(s(x)) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, mit einer konvexen Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich äquivalent durch die endliche Menge $g(\alpha_i) \leq 0, i = -k, \dots, n - 1$, konvexer Restriktionen ausdrücken.
- (iii) Wegen des minimalen Trägers von B -Splines (vgl. 2.10) haben lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der $n + k$ Koeffizienten $\alpha_i, i = -k, \dots, n - 1$, stets eine Matrix mit Bandstruktur. Überdies ist dieses Band am schmalsten bei Verwendung der B -Spline-Basis im Vergleich zu anderen Basen im Raum $S_k(\Omega_n)$.

2.2 Interpolation mit Splines

Das Ziel besteht darin, gegebene Funktionswerte bzw. eine gegebene Funktion auf einem gegebenen Intervall $[a, b]$ mit einem Spline aus $S_k(\Omega_n)$ mit $k \in \mathbb{N}$ zu interpolieren. Gemäß Bemerkung 2.12 werden dazu $n + k$ Interpolationsbedingungen nötig. Dies wirft folgende Fragen auf:

- (i) Bei Benutzung der Knoten $t_i, i = 0, \dots, n$, als Stützstellen zur Interpolation in $[a, b]$ entstehen (nur) $n + 1$ Gleichungen und es fehlen noch $k - 1$ Bedingungen. Wie sind diese Bedingungen zu wählen? Für $k = 1$ sind genügend Gleichungen vorhanden und die Interpolationsaufgabe ist für lineare Splines lösbar (Übung); für $k > 1$ ungerade lassen sich die $k - 1$ fehlenden Bedingungen zu gleichen Teilen als Randbedingungen in den Punkten $t_0 = a$ und $t_n = b$ vorgeben. Für gerades $k > 1$ ist dieses "symmetrische" Aufstellen von Bedingungen nicht möglich.
- (ii) Bei Benutzung andere Stützstellen zur Interpolation müssen notwendigerweise $n + k$ solcher Punkte $\tau_j, j = 1, \dots, n + k$, und zugehörige Funktionswerte vorgegeben werden. Diese Stützstellen sind aber nicht beliebig wählbar, da die B -Splines $\{B_{ki} : i = -k, \dots, n - 1\}$ kein Tschebychev-System in $[a, b]$ bilden!

Wir beginnen bei den theoretischen Untersuchungen mit Antworten zur Problematik (ii), da hier der allgemeinste Fall für bel. $k \in \mathbb{N}$ behandelbar ist. Die folgende klassische Aussage klärt dabei die Wahl der Stützstellen.

Satz 2.13 (Schoenberg-Whitney)

Es existiert genau dann ein eindeutig bestimmter Spline $s \in S_k(\Omega_n)$ der in den $n + k$ Stützstellen $a \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+k} \leq b$ beliebig vorgegebene Werte f_1, \dots, f_{n+k} annimmt, wenn

$$B_{k,j-k-1}(\tau_j) \neq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n + k.$$

Beweis: Jedes $s \in S_k(\Omega_n)$ lässt sich nach Satz 2.11 wie folgt darstellen:

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Die Interpolationsbedingungen bedeuten also :

$$(*) \quad \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(\tau_j) = f_j, \quad \forall j = 1, \dots, n+k.$$

Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Bedingung

$$(**) \quad B_{k,j-k-1}(\tau_j) \neq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n+k,$$

für die eindeutige Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe (*) für beliebige rechte Seiten.

Annahme: $\exists j \in \{1, \dots, n+k\} : B_{k,j-k-1}(\tau_j) = 0$.

Dann gilt entweder $\tau_j \leq t_{j-k-1}$ oder $t_j \leq \tau_j$ (vgl. 2.3a) und 2.10). Wir betrachten zuerst den Fall $\tau_j \leq t_{j-k-1}$. Dann gilt:

$$B_{ki}(x) = 0, \quad \forall x \leq \tau_j, \quad \forall i \geq j-k-1.$$

Deshalb lauten die ersten j Interpolationsbedingungen aus (*) wie folgt

$$\sum_{i=-k}^{j-k-2} \alpha_i B_{ki}(\tau_\ell) = f_\ell, \quad \ell = 1, \dots, j.$$

Dies sind aber j Gleichungen für die $j-1$ Unbekannten $\alpha_{-k}, \dots, \alpha_{j-k-2}$. Also kann nicht für jede rechte Seite eine Lösung dieses Gleichungssystems existieren.

Im zweiten Fall $t_j \leq \tau_j$ ergeben analog die letzten $n+k-j$ Interpolationsbedingungen $n+k-j$ Gleichungen für nur $n+k-j-1$ Unbekannte. Dieses kann auch nicht für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar sein. Deshalb ist die Annahme falsch und die Notwendigkeit bewiesen.

Für die Hinlänglichkeit zeigen wir, dass mit (**) im Fall $f_j = 0, j = 1, \dots, n+k$, die Bedingung (*) $\alpha_i = 0, i = -k, \dots, n-1$, impliziert, d.h., dass das homogene Interpolationsproblem nur die triviale Lösung $s = 0$ besitzt (falls (**) erfüllt ist).

Annahme: $s \neq 0$.

$\leadsto \exists \sigma, \tau \in \{-k, \dots, n+k\}, \sigma < \tau$, so dass $s(x) \neq 0, \forall x \in [t_\sigma, t_\tau]$ und $s(x) = 0, \forall x \in [t_{\sigma-1}, t_\sigma] \cup [t_\tau, t_{\tau+1}]$.

(Dies ist mindestens für $\sigma = -k$ und $\tau = n+k$ immer richtig; $s(x) \neq 0$ bedeutet hier, dass s nur isolierte Nullstellen haben darf.)

Aus Lemma 2.9 folgt dann sofort $\tau - \sigma \geq k+1$.

$\leadsto B_{ki}$ hat seinen Träger in $[t_\sigma, t_\tau]$, falls $i = \sigma, \dots, \tau - k - 1$.

$\leadsto \tau_j \in (t_\sigma, t_\tau)$, falls $j - k - 1 \in \{\sigma, \dots, \tau - k - 1\}$ bzw. $j \in \{\sigma + k + 1, \dots, \tau\}$ (wegen (**)).

$\leadsto s(\tau_j) = 0, \forall j = \sigma + k + 1, \dots, \tau$.

$\leadsto s$ hat $\tau - \sigma - k$ Nullstellen in (t_σ, t_τ) , was nach Lemma 2.9b) unmöglich ist.

Also muss die Annahme falsch sein und alles ist bewiesen. \square

Bemerkung 2.14 (Lösung der Interpolationsaufgabe)

Es seien $n+k$ Funktionswerte $f_j, j = 1, \dots, n+k$, und Stützstellen $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+k} \leq b$ mit $B_{k,j-k-1}(\tau_j) \neq 0, \forall j = 1, \dots, n+k$, gegeben. Der interpolierende Spline hat dann die Gestalt

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(x), \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{wobei } (*) \quad \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(\tau_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, n+k.$$

Wegen der Eigenschaften der B -Splines (Lemma 2.3a)) gilt die Bedingung

$$\tau_j \in (t_{j-k-1}, t_j) \cap [a, b] \quad \text{bzw.} \quad \tau_j \in [t_{\max\{0, j-k-1\}}, t_{\min\{j, n\}}] \quad (j = 1, \dots, n+k)$$

und folglich reduziert sich das lineare Gleichungssystem (*) auf:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-k}^0 \alpha_i B_{ki}(\tau_1) &= f_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=-k+j-1}^{j-1} \alpha_i B_{ki}(\tau_j) &= f_j \quad \text{oder} \quad \sum_{i=\min\{j-k-1, n-k-1\}}^{\min\{j-1, n-1\}} \alpha_i B_{ki}(\tau_j) = f_j \quad (j = 1, \dots, n+k). \\ &\vdots \\ \sum_{i=n-k-1}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(\tau_{n+k}) &= f_{n+k} \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathcal{B} = (B_{ki}(\tau_j))$ des linearen Gleichungssystems ist also eine Matrix mit Bandstruktur und maximaler Bandbreite $k+1$, d.h., links und rechts der Hauptdiagonale sind höchstens k Elemente in jeder Zeile von 0 verschieden.

Diese Bandstruktur lässt sich beim Lösen der linearen Gleichungssysteme durch direkte oder iterative Verfahren effizient ausnutzen. Die pro Zeile der Matrix $k+1$ von 0 verschiedenen Elemente $B_{ki}(\tau_j)$ lassen sich über die Rekursionsformel 2.4 effizient berechnen.

Beispiel 2.15 (Quadratische interpolierende Splines)

Äquidistante Spline-Knoten: $t_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h := \frac{b-a}{n}$.

Stützstellen: $\tau_1 := t_0$, $\tau_j \in (t_{j-2}, t_{j-1})$, $j = 2, \dots, n+1$, $t_{n+2} := t_n$.

Dann gilt $B_{2, j-3}(\tau_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, n+2$, und die Voraussetzung von Satz 2.13 ist erfüllt. Nach Bemerkung 2.14 hat der eindeutig existierende interpolierende quadratische Spline die Gestalt:

$$s(x) = \sum_{i=-2}^{n-1} \alpha_i B_{2i}(x), \quad x \in [a, b],$$

wobei das lineare Gleichungssystem für die α_i die Gestalt hat

$$\sum_{i=\min\{j-3, n-3\}}^{\min\{j-1, n-1\}} \alpha_i B_{2i}(\tau_j) = f_j \quad (j = 1, \dots, n+2).$$

Die zugehörige Matrix ist eine sogenannte Tridiagonalmatrix

$$\text{tridag}(b_j, a_j, c_j) = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n+1} \\ & & & b_{n+2} & a_{n+2} \end{pmatrix}$$

Für solche Matrizen existieren einfache Algorithmen zur Berechnung von Dreieckszerlegungen (vgl. Hämmerlin/Hoffmann, Kap. 2.1.4.)

Die Berechnung der Elemente $B_{2i}(\tau_j)$, $j = 2, \dots, n + 1$, der Tridiagonalmatrix erfolgt mit Hilfe der Formeln aus Beispiel 2.6:

$$B_{2i}(\tau_j) = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} (\tau_j - t_{j-1})^2 & , i = j - 2, j - 4, \\ h^2 + 2h(\tau_j - t_{j-2}) - 2(\tau_j - t_{j-2})^2 & , i = j - 3. \end{cases}$$

Für den Spezialfall $\tau_j = t_{j-2} + \frac{h}{2}$, $j = 2, \dots, n + 1$, gilt:

$$B_{2i}(\tau_j) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , i = j - 2, j - 4, \\ \frac{3}{4} & , i = j - 3. \end{cases}$$

Satz 2.13 wirft die Frage auf, nach welchen Gesichtspunkten die Stützstellen über die Erfüllung der Bedingung $B_{k,j-k-1}(\tau_j) \neq 0$ hinaus gewählt werden sollen.

Wir geben darauf eine allgemeine Antwort, die dann für den Fall $k = 2$ genauer untersucht bzw. spezialisiert wird. Es sei $\tau := \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+k} = t_n\}$ und $P_{k,\tau}$ sei die Abbildung von $C([a, b])$ in den Splineraum $S_k(\Omega_n)$, die jedem $f \in C([a, b])$ den zugehörigen interpolierenden Spline $s = P_{k,\tau}f \in S_k(\Omega_n)$ zuordnet.

Satz 2.16 *Für jedes $f \in C([a, b])$ gilt, falls die Interpolationsbedingungen aus Satz 2.13 erfüllt sind:*

$$d(f, S_k(\Omega_n)) \leq \|f - P_{k,\tau}f\|_\infty \leq (1 + \|P_{k,\tau}\|)d(f, S_k(\Omega_n)),$$

wobei $d(f, S_k(\Omega_n)) = \inf_{s \in S_k(\Omega_n)} \|f - s\|_\infty$, $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Norm in $C([a, b])$ ist und

$$\|P_{k,\tau}\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|P_{k,\tau}f\|_\infty \leq \|\mathcal{B}^{-1}\|_\infty, \quad \text{wobei } \mathcal{B} = (B_{ki}(\tau_j))_{\substack{i=-k, \dots, n-1 \\ j=1, \dots, n+k}}.$$

Beweis: Es sei $s \in S_k(\Omega_n)$ beliebig gewählt. Dann gilt $s = P_{k,\tau}s$ und folglich

$$\begin{aligned} f - P_{k,\tau}f &= (I - P_{k,\tau})f = (I - P_{k,\tau})(f - s) \\ \rightsquigarrow d(f, S_k(\Omega_n)) &\leq \|f - P_{k,\tau}f\|_\infty \leq \|I - P_{k,\tau}\| \|f - s\|_\infty \\ &\leq (1 + \|P_{k,\tau}\|) \|f - s\|_\infty \quad (\text{vgl. Lemma 1.47}). \end{aligned}$$

Durch Infimumbildung bzgl. $s \in S_k(\Omega_n)$ ergibt sich daraus der erste Teil der Aussage. Für die verbleibende Abschätzung von $\|P_{k,\tau}\|$ erhalten wir für beliebiges $f \in C([a, b])$:

$$\begin{aligned} |P_{k,\tau}f(x)| &= \left| \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(x) \right| \leq \sum_{i=-k}^{n-1} |\alpha_i| B_{ki}(x) \\ &\leq \left(\sum_{i=-k}^{n-1} B_{ki}(x) \right) \|\alpha\|_\infty = \|\alpha\|_\infty, \quad \forall x \in [a, b], \end{aligned}$$

wobei $\alpha := (\alpha_{-k}, \dots, \alpha_{n-1})$, $\sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i B_{ki}(\tau_j) = f(\tau_j)$, $j = 1, \dots, n + k$. D.h., es gilt

$\mathcal{B}\alpha = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+k}))^\top$ bzw. $\alpha = \mathcal{B}^{-1}(f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+k}))^\top$ und damit

$$\|P_{k,\tau}f\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \leq \|\mathcal{B}^{-1}\|_\infty \max_{j=1, \dots, n+k} |f(\tau_j)| \leq \|\mathcal{B}^{-1}\|_\infty \|f\|_\infty.$$

□

Bemerkung 2.17 Satz 2.16 besagt, dass die Interpolation mit Splines bzgl. der sup-Norm auf $C([a, b])$ höchstens um den Faktor $1 + \|P_{k,\tau}\|$ schlechter als die beste Approximation von f aus dem Spliner Raum ist. Also ist der Term $\|P_{k,\tau}\|$ entscheidend, der bei fixierten (Spline-) Knoten wesentlich von der Wahl der Interpolationspunkte $\tau_j, j = 1, \dots, n+k$, abhängt. Klar ist, dass $\|P_{k,\tau}\| \geq 1$ gilt; also sollte $\|P_{k,\tau}\|$ möglichst nahe an 1 liegen. Allgemeines Kriterium für die Wahl von τ :

Minimiere $\|\mathcal{B}^{-1}\|_\infty$, wobei $\mathcal{B} = (B_{ki}(\tau_j))_{\substack{i=-k,\dots,n-1 \\ j=1,\dots,n+k}}$ bzgl. der $\tau_j, j = 1, \dots, n+k$!

Allgemeine Ergebnisse bzgl. einer solchen *optimalen* Wahl der Interpolationspunkte sind schwierig bzw. unmöglich. Im Folgenden geben wir aber eine gewisse Antwort für quadratische Splines.

Satz 2.18 *Es seien die Spline-Knoten $\{t_j : j \in \mathbb{Z}\}$ fixiert, $[a, b] = [t_0, t_n]$. Falls für $k = 2$ die Interpolationspunkte so gewählt sind, dass*

$$a = t_0 = \tau_1, \tau_{n+2} = t_n = b \text{ und } \tau_j := \frac{1}{2}(t_{j-2} + t_{j-1}), j = 2, \dots, n+1,$$

so gilt

$$\|P_{2,\tau}\| \leq 2.$$

Beweis: Es sei $f \in C([a, b])$ beliebig und $s := P_{2,\tau}f$, wobei die Interpolationspunkte $\tau_j, j = 1, \dots, n+2$, wie in der Voraussetzung gewählt sind. Wir zeigen: $\|s\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$. Es sei s_j die quadratische Funktion mit $s_j(x) = s(x), \forall x \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, n-1$, d.h., $s_j(t_j) = s(t_j), s_j(t_{j+1}) = s(t_{j+1})$ und $s_j(\tau_{j+2}) = f(\tau_{j+2}), j = 0, \dots, n-1$. Dann folgt aus der Interpolationsformel von Lagrange die Darstellung

$$s_j(x) = \frac{2}{h_j^2} [(x-t_{j+1})(x-\tau_{j+2})s(t_j) - 2(x-t_j)(x-t_{j+1})f(\tau_{j+2}) + (x-t_j)(x-\tau_{j+2})s(t_{j+1})]$$

für alle $x \in [t_j, t_{j+1}]$, wobei $h_j = t_{j+1} - t_j$. Wir unterscheiden nun die Fälle $x \in [t_j, \tau_{j+2}]$ bzw. $x \in (\tau_{j+2}, t_{j+1})$ und schätzen wie folgt ab. Für $x \in [t_j, \tau_{j+2}]$ gilt:

$$\begin{aligned} |s_j(x)| &\leq \frac{2}{h_j^2} [(\tau_{j+2} - x)h_j \max\{|s(t_j)|, |s(t_{j+1})|\} + 2(x - t_j)(t_{j+1} - x)|f(\tau_{j+2})|] \\ &\leq \frac{2}{h_j^2} [(\tau_{j+2} - x)h_j + (x - t_j)(t_{j+1} - x)] \max\{|s(t_j)|, 2|f(\tau_{j+2})|, |s(t_{j+1})|\} \\ &= \frac{2}{h_j^2} [h_j\{(\tau_{j+2} - x) + (x - t_j)\} - (x - t_j)^2] \max\{\dots\} \\ &= \frac{2}{h_j^2} \left[\frac{h_j^2}{2} - (x - t_j)^2 \right] \max\{\dots\} \leq \max\{|s(t_j)|, 2|f(\tau_{j+2})|, |s(t_{j+1})|\}. \end{aligned}$$

Dieselbe Ungleichung zeigt man analog für $x \in (\tau_{j+2}, t_{j+1})$, wobei in der letzten Ungleichung entsteht, dass

$$|s_j(x)| \leq \frac{2}{h_j^2} \left[\frac{h_j^2}{2} - (t_{j+1} - x)^2 \right] \max\{|s(t_j)|, 2|f(\tau_{j+2})|, |s(t_{j+1})|\}.$$

Also genügt es im Folgenden zu zeigen, dass die Ungleichungen

$$|s(t_j)| \leq 2\|f\|_\infty, \quad j = 0, \dots, n,$$

gültig sind. Dies ist für $j = 0$ und $j = n$ trivial, muss also nur noch für $j = 1, \dots, n-1$ gezeigt werden. Aus der obigen Darstellung von s_j folgt

$$\begin{aligned} s'_j(t_j) &= \frac{2}{h_j^2} \left[((t_j - \tau_{j+2}) + (t_j - t_{j+1}))s(t_j) - 2(t_j - t_{j+1})f(\tau_{j+2}) + (t_j - \tau_{j+2})s(t_{j+1}) \right] \\ &= \frac{2}{h_j^2} \left[-\frac{3}{2}h_j s(t_j) + 2h_j f(\tau_{j+2}) - \frac{h_j}{2}s(t_{j+1}) \right] \\ &= \frac{1}{h_j} \left[-3s(t_j) + 4f(\tau_{j+2}) - s(t_{j+1}) \right] \quad (j = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$s'_j(t_{j+1}) = \frac{1}{h_j} \left[s(t_j) - 4f(\tau_{j+2}) + 3s(t_{j+1}) \right] \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $s' \in C([a, b])$ folgt

$$s'_j(t_{j+1}) = s'_{j+1}(t_{j+1}), \quad j = 0, \dots, n-2,$$

und deshalb für $j = 0, \dots, n-2$

$$\frac{1}{h_j} \left[s(t_j) - 4f(\tau_{j+2}) + 3s(t_{j+1}) \right] = \frac{1}{h_{j+1}} \left[-3s(t_{j+1}) + 4f(\tau_{j+3}) - s(t_{j+2}) \right]$$

$$\rightsquigarrow s(t_j)h_{j+1} + 3s(t_{j+1})(h_j + h_{j+1}) + s(t_{j+2})h_j = 4f(\tau_{j+2})h_{j+1} + 4f(\tau_{j+3})h_j.$$

Es sei nun $M := |s(t_\ell)| = \max\{|s(t_j)| : j = 0, 1, \dots, n\}$. Für $\ell = 0$ und $\ell = n$ ist alles gezeigt. Ist $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, so folgt aus den obigen Gleichungen:

$$3M(h_{\ell-1} + h_\ell) = 3|s(t_\ell)|(h_{\ell-1} + h_\ell) \leq (4\|f\|_\infty + M)(h_{\ell-1} + h_\ell)$$

und damit

$$2M \leq 4\|f\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad M \leq 2\|f\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad \max_{j=1, \dots, n-1} |s(t_j)| \leq 2\|f\|_\infty.$$

□

Wir wenden uns nun der Interpolation mit Splines unter Verwendung der Splineknoten als Interpolationspunkte zu. Für $k > 1$ fehlen dabei $k-1$ Bedingungen, die wir symmetrisch als Randbedingungen in a und b formulieren wollen. Dazu muss k ungerade sein und wir betrachten die Splineräume

$$S_{2m-1}(\Omega_n), \quad m \geq 2.$$

Außerdem müssen die zu interpolierenden Funktionen Glattheitsbedingungen erfüllen.

Definition 2.19 Es sei $f \in C^m([a, b])$, $m \geq 2$. Man sagt, $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ erfüllt die Randbedingung (RB), falls

$$\sum_{\ell=0}^{m-2} (-1)^\ell s^{(m+\ell)}(a) d^{(m-\ell-1)}(a) = \sum_{\ell=0}^{m-2} (-1)^\ell s^{(m+\ell)}(b) d^{(m-\ell-1)}(b)$$

wobei $d(x) := f(x) - s(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

(Für $m = 2$ ergibt sich $s''(a)(f'(a) - s'(a)) = s''(b)(f'(b) - s'(b))$.)

In den folgenden Beispielen formulieren wir jeweils $2m - 2$ Randbedingungen (jeweils $m - 1$ Bedingungen in jedem Randpunkt), die sämtlich hinreichend für (RB) sind.

Beispiel 2.20

- (a) Natürliche Endbedingungen: $s^{(\ell)}(a) = s^{(\ell)}(b) = 0$, $\ell = m, \dots, 2m - 2$;
- (b) Hermite-Endbedingungen: $s^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(a)$, $s^{(\ell)}(b) = f^{(\ell)}(b)$, $\ell = 1, \dots, m - 1$;
- (c) periodische Endbedingungen: $f^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(b)$, $\ell = 0, \dots, m - 1$, $s^{(\ell)}(a) = s^{(\ell)}(b)$, $\ell = 1, \dots, 2m - 2$.

Satz 2.21 (Integralrelation)

Es sei $f \in C^m([a, b])$ und $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$, $m \geq 2$, sei ein interpolierender Spline, d.h., $s(t_i) = f(t_i)$, $i = 0, \dots, n$, der die Randbedingung (RB) erfüllt.

Dann gilt die Integralrelation

$$\int_a^b [f^{(m)}(x)]^2 dx = \int_a^b [f^{(m)}(x) - s^{(m)}(x)]^2 dx + \int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx.$$

Beweis: Es ist zu zeigen: $I := \int_a^b [f^{(m)}(x)s^{(m)}(x) - (s^{(m)}(x))^2] dx = 0$.

Wie in 2.19 setzen wir $d := f - s$ und erhalten durch wiederholte partielle Integration

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b s^{(m)}(x) d^{(m)}(x) dx = [s^{(m)}(x) d^{(m-1)}(x)]_a^b - \int_a^b s^{(m+1)}(x) d^{(m-1)}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{m-3} (-1)^j [s^{(m+j)}(x) d^{(m-j-1)}(x)]_a^b + (-1)^{m-2} \int_a^b s^{(2m-2)}(x) d''(x) dx. \end{aligned}$$

Da wir $s^{(2m-2)}$ nicht noch einmal auf dem gesamten Intervall differenzieren können, spalten wir das letzte Integral auf und erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b s^{(2m-2)}(x) d''(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} s^{(2m-2)}(x) d''(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [s^{(2m-2)}(x) d'(x) - s^{(2m-1)}(x) d(x)]_{t_{i-1}}^{t_i} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} s^{(2m)}(x) d(x) dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n [s^{(2m-2)}(x) d'(x)]_{t_{i-1}}^{t_i} = [s^{(2m-2)}(x) d'(x)]_a^b. \end{aligned}$$

Dies gilt wegen $s^{(2m)}(x) = 0, \forall x \in (t_{i-1}, t_i), \forall i = 1, \dots, n$, und $d(t_i) = 0, \forall i = 0, \dots, n$.
Insgesamt erhalten wir:

$$I = \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j [s^{(m+j)}(x)d^{(m-j-1)}(x)]_a^b = 0 \quad \text{wegen (RB).}$$

□

Folgerung 2.22 (*Extremaleigenschaft*)

Es seien $f_j, j = 0, \dots, n$, gegeben und $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ ($m \geq 2$) sei ein interpolierender Spline, d.h., $s(t_i) = f_i, i = 0, \dots, n$, der die Randbedingung (RB) erfüllt. Dann gilt

$$\int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx = \min_{g \in \mathcal{G}} \int_a^b [g^{(m)}(x)]^2 dx,$$

wobei $\mathcal{G} := \{g \in C^m([a, b]) : g(t_i) = f_i, i = 0, \dots, n\}$.

Beweis: Es sei $g \in \mathcal{G}$ beliebig gewählt. Dann gilt Satz 2.21 für $f := g$ und wir erhalten:

$$\int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g^{(m)}(x)]^2 dx, .$$

Wegen $s \in \mathcal{G}$ folgt daraus die Aussage.

□

Bemerkung 2.23 Für $m = 2$ bedeutet Folgerung 2.22, dass die kubischen interpolierenden Splines, die (RB) erfüllen, unter allen interpolierenden Funktionen aus $C^2([a, b])$ diejenigen mit der geringsten "Krümmung" auf $[a, b]$ sind.

Satz 2.24 (*Existenz und Eindeutigkeit*)

Es sei $f \in C^m([a, b]), m \geq 2$. Dann existiert genau ein $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$, so dass s interpoliert, d.h., $s(t_i) = f(t_i), i = 0, \dots, n$, und $2m - 2$ Endbedingungen erfüllt, die (RB) implizieren und die für $f \equiv 0$ nur durch das triviale interpolierende Polynom $(m - 1)$ -ten Grades erfüllbar sind.

Beweis: Nach Satz 2.8 hat der Spline-Raum $S_{2m-1}(\Omega_n)$ die Dimension $n + 2m - 1$ und die Funktionen

$$\{(\cdot - a)^j, [\cdot - t_i]_+^{2m-1} : j = 0, \dots, 2m - 1, i = 1, \dots, n - 1\}$$

bilden eine Basis in diesem Raum. (Es zeigt sich, dass diese Basis für unsere jetzigen Zwecke besser geeignet ist als die B -Spline Basis.)

Jeder Spline $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ lässt sich also darstellen in der Form

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} a_j (x - a)^j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i [x - t_i]_+^{2m-1}, \quad \forall x \in [a, b].$$

An s werden $n + 1$ Interpolationsbedingungen und $2m - 2$ Endbedingungen gestellt. Es entstehen also in jedem Fall $n + 2m - 1$ Gleichungen für die $n + 2m - 1$ Unbekannten $a_j, j = 0, \dots, 2m - 1, b_i, i = 1, \dots, n - 1$. Wir zeigen, dass die Matrix dieses linearen Gleichungssystems regulär ist, indem wir zeigen, dass das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung besitzt. Das homogene Gleichungssystem entspricht aber dem Fall, dass die Funktion $f \equiv 0$ zu interpolieren ist.

Wir zeigen: $s \equiv 0$ ist die einzige Lösung dieser Interpolationsaufgabe.

Wegen $f \equiv 0$ folgt aber aus Satz 2.21 sofort: $s^{(m)} \equiv 0$.

Aus der obigen Baisdarstellung für $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ folgt:

$$s^{(m)}(x) = \sum_{j=m}^{2m-1} a_j \prod_{\ell=0}^{m-1} (j-\ell)(x-a)^{j-m} + \prod_{\ell=0}^{m-1} (2m-1-\ell) \sum_{i=1}^{n-1} b_i [x-t_i]_+^{m-1}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ist also $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ eine Lösung der homogenen Interpolationsaufgabe, so gilt $s^{(m)} \equiv 0$ und folglich $a_j = 0, j = m, \dots, 2m - 1$, und $b_i = 0, i = 1, \dots, n$, da $s^{(m)}$ Linearkombination linear unabhängiger Funktionen ist. Deshalb gilt:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j (x-a)^j, \quad \forall x \in [a, b].$$

Also ist s ein Polynom $(m - 1)$ -ten Grades, das die $2m - 2$ Endbedingungen erfüllt. Die Voraussetzung impliziert nun $s \equiv 0$. \square

Folgerung 2.25 Die Interpolationsaufgabe in Satz 2.24 ist eindeutig lösbar, falls eine der folgenden Situationen vorliegt:

- (i) Es sind $2m - 2$ Endbedingungen gegeben, die (RB) implizieren, und $n + 1 \geq m$;
- (ii) Hermite-Endbedingungen (vgl. 2.20);
- (iii) periodische Endbedingungen (vgl. 2.20).

Beweis: Da in allen 3 Fällen die bedingung (RB) erfüllt ist, genügt es, für $f \equiv 0$ zu zeigen, dass nur das triviale Polynom $(m - 1)$ -ten Grades die Endbedingungen erfüllen und interpolieren kann. Es sei

$$s(x) := \sum_{j=0}^{m-1} a_j (x-a)^j, \quad \forall x \in [a, b].$$

- (i) Es gilt $s(t_i) = 0, i = 0, \dots, n$, und $n + 1 \geq m$. Dies ist aber nach dem Fundamentalsatz der Algebra nur für das triviale Polynom möglich.
- (ii) $s^{(\ell)}(a) = 0, \ell = 0, \dots, m - 1$, impliziert sofort $a_j = 0, j = 0, \dots, m - 1$.
- (iii) Aus den Bedingungen $s^{(m-2)}(a) = s^{(m-2)}(b), \dots, s(a) = s(b)$ folgt sukzessive $a_{m-1} = 0, a_{m-2} = 0, \dots, a_1 = 0$. $s(t_0) = s(a) = 0$ liefert schließlich $a_0 = 0$ und $s \equiv 0$. \square

Da die Bedingung $n + 1 \geq m$ eine eher schwache Voraussetzung an die Anzahl der Spline-Knoten ist, ist also auch für die Existenz interpolierender Splines die Bedingung (RB) entscheidend.

Bemerkung 2.26 Für die Berechnung der interpolierenden Splines bietet sich wieder die B -Spline Basisdarstellung an. Für jedes $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ haben wir die Darstellung

$$s(x) = \sum_{i=-2m+1}^{n-1} \alpha_i B_{2m-1,i}(x), \quad x \in [a, b].$$

Die Interpolationsbedingungen in den Spline-Knoten ergeben die $n + 1$ Gleichungen:

$$s(t_j) = \sum_{i=-j-2m+1}^{j-1} \alpha_i B_{2m-1,i}(t_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Gemeinsam mit den $2m-2$ Endbedingungen ergeben sich daraus $n+2m-1$ Gleichungen für die α_i , $i = -2m + 1, \dots, n - 1$ (vgl. Hämmerlin/Hoffmann, Kap. 6.4).

2.3 Konvergenz approximierender und interpolierender Splines

Es sei $[a, b]$ wieder ein gegebenes Intervall, $\{t_i, i \in \mathbb{Z}\}$ eine Menge von Knoten mit den Eigenschaften wie vor 2.1 und so, dass $\Omega_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ die Knotenmenge in $[a, b]$ ist. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir wieder die Splineräume $S_k(\Omega_n)$ und wir interessieren uns für das Verhalten von

$$d(f, S_k(\Omega_n)) = \inf_{s \in S_k(\Omega_n)} \|f - s\|_\infty$$

für $f \in C([a, b])$, falls $h = \max_{j=1, \dots, n} (t_j - t_{j-1})$ gegen 0 geht.

Wegen Satz 2.16 lassen sich unter weiteren Voraussetzungen an den Interpolationsoperator auch Aussagen über die Konvergenz von interpolierenden Splines machen.

Wir beginnen aber mit der Untersuchung von $d(f, S_k, (\Omega_n))$ unter verschiedenen Voraussetzungen an $f \in C([a, b])$.

Satz 2.27 Für jedes $f \in C([a, b])$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(f, S_k(\Omega_n)) \leq \omega\left(f; \frac{1}{2}(k+1)h\right),$$

wobei $h := \max_{j=1, \dots, n} (t_j - t_{j-1})$ und $\omega(f; \delta)$ den Stetigkeitsmodul von f bezeichnet.

Insbesondere gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(f, S_k(\Omega_n)) = 0, \quad \forall f \in C([a, b]).$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass ein $s \in S_k(\Omega_n)$ mit der Eigenschaft

$$\|f - s\|_\infty \leq \omega\left(f; \frac{1}{2}(k+1)h\right)$$

existiert. Dazu betrachten wir den folgenden Spline aus $S_k(\Omega_n)$:

$$s(x) := \sum_{i=-k}^{n-1} f(x_i) B_{ki}(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

wobei $x_i \in \operatorname{argmin}\{|x - \frac{1}{2}(t_i + t_{i+k+1})| : x \in [a, b]\}$, $i = -k, \dots, n-1$.
(Also gilt

$$x_i = \begin{cases} a & , \text{ falls } \frac{1}{2}(t_i + t_{i+k+1}) \leq a \\ \frac{1}{2}(t_i + t_{i+k+1}) & \text{sonst} \\ b & , \text{ falls } \frac{1}{2}(t_i + t_{i+k+1}) \geq b. \end{cases}$$

Wegen Lemma 2.3b) und Folgerung 2.5 gilt nun

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &= \left| \sum_{i=-k}^{n-1} (f(x) - f(x_i)) B_{ki}(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=-k}^{n-1} |f(x) - f(x_i)| B_{ki}(x) \\ &\leq \sum_{i=-k}^{n-1} \omega(f; |x - x_i|) B_{ki}(x), \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Außerdem gilt wegen $B_{ki}(x) = 0$, $\forall x \in [a, b] \setminus (t_i, t_{i+k+1})$, (Lemma 2.3a)) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \omega(f; |x - x_i|) B_{ki}(x) &\leq \max_{y \in [t_i, t_{i+k+1}]} \omega(f; |y - x_i|) B_{ki}(x) \\ &\leq \omega\left(f; \max_{y \in [t_i, t_{i+k+1}]} |y - x_i|\right) B_{ki}(x) \leq \omega\left(f; \frac{1}{2}(t_{i+k+1} - t_i)\right) B_{ki}(x) \\ &\leq \omega\left(f; \frac{1}{2}(k+1)h\right) B_{ki}(x), \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Folglich gilt :

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &\leq \omega\left(f; \frac{1}{2}(k+1)h\right) \sum_{i=-k}^{n-1} B_{ki}(x) \\ &= \omega\left(f; \frac{1}{2}(k+1)h\right), \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

□

Satz 2.27 zeigt, dass die Darstellung von Splines mit einer B -Spline Basis nicht nur für numerische Zwecke, sondern auch für die theoretische Analysis günstig sein kann.

Es zeigt sich, dass bessere Schranken für $d(f, S_k(\Omega_n))$ (im Sinne von Konvergenzordnung bzgl. h) hergeleitet werden können, falls f Differenzierbarkeits-Eigenschaften hat. Folgendes lässt sich zunächst aus Satz 2.27 schlussfolgern.

Bemerkung 2.28 Ist f Lipschitzstetig auf $[a, b]$ mit Konstante L_f , so gilt $\omega(f; \delta) \leq L_f \delta$, $\forall \delta > 0$, und folglich

$$d(f, S_k(\Omega_n)) \leq \frac{1}{2}(k+1)hL_f.$$

Insbesondere gilt für stetig differenzierbares f , d.h., $f \in C^1([a, b])$:

$$d(f, S_k(\Omega_n)) \leq \frac{1}{2}(k+1)h\|f'\|_\infty.$$

Satz 2.29 Es seien $\ell \in \mathbb{N}$ und $f \in C^j([a, b])$ beliebig gewählt. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, \min\{\ell, k + 1\}\}$:

$$d(f, S_k(\Omega_n)) \leq \frac{(k+1)!}{(k+1-j)!} \left(\frac{1}{2}h\right)^j \|f^{(j)}\|_\infty.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion über k und j und beginnen mit dem Induktionsanfang.

$j = 1$: Die Aussage ist identisch mit dem Resultat in Bemerkung 2.28 für alle $k \in \mathbb{N}$.

$k = 1$ und $j = 2$: (wir benötigen dies für die spezielle Situation $j = k + 1$ als Induktionsanfang).

Wir zeigen: $\exists s \in S_1(\Omega_n)$: $\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{2}h^2\|f''\|_\infty$.

Dazu wählen wir s als interpolierenden Polygonzug, d.h. so, dass

$$s(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Dann gilt für $x \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, n-1$) nach der Restgliedabschätzung für die Polynom-Interpolation

$$f(x) - s(x) = (x - t_i)(x - t_{i+1}) \frac{1}{2!} f''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (t_i, t_{i+1}).$$

$$\leadsto |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2}h^2\|f''\|_\infty, \quad \forall x \in [t_i, t_{i+1}], \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Also ist der Induktionsanfang bewiesen.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Ungleichung für $j-1$ bzw. $k-1$ anstelle von j bzw. k und für alle $f \in C^j([a, b])$ erfüllt sei. Dann gilt für die Ableitung f' von f , dass

$$d(f', S_{k-1}(\Omega_n)) \leq \frac{k!}{(k+1-j)!} \left(\frac{1}{2}h\right)^{j-1} \|f^{(j)}\|_\infty.$$

Wir wählen $\tilde{s} \in S_{k-1}(\Omega_n)$ mit der Eigenschaft

$$\|f' - \tilde{s}\|_\infty = d(f', S_{k-1}(\Omega_n))$$

und \hat{s} als Stammfunktion von \tilde{s} . Dann gilt $\hat{s} \in S_k(\Omega_n)$ und es existiert ein $s \in S_k(\Omega_n)$, so dass

$$d(f - \hat{s}, S_k(\Omega_n)) = \|f - \hat{s} - s\|_\infty = \|f - (s + \hat{s})\|_\infty \geq d(f, S_k(\Omega_n)).$$

Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} d(f, S_k(\Omega_n)) &\leq d(f - \hat{s}, S_k(\Omega_n)) \leq \frac{1}{2}(k+1)h\|f' - \tilde{s}\|_\infty & (2.28!) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)h\|f' - \tilde{s}\|_\infty \leq \frac{(k+1)!}{(k+1-j)!} \left(\frac{1}{2}h\right)^j \|f^{(j)}\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.30 Die Konstanten in der Abschätzung in Satz 2.29 sind i.a. nicht bestmöglich. Dies zeigt das Beispiel $k = 1, j = 2$, wo durch eine genauere Abschätzung $\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{8}h^2\|f''\|_\infty$ gezeigt werden kann. Allerdings sind die Exponenten der Potenzen von h bestmöglich. Bei $f \in C^{k+1}([a, b])$ ist in der Tat h^{k+1} die bestmögliche "Konvergenzgeschwindigkeit" für $h \rightarrow 0$.

Wir wenden nun die obigen Ergebnisse auf die Konvergenz von interpolierenden Splines an. Dabei greifen wir auf Satz 2.16 zurück und untersuchen die Normen der Interpolationsoperatoren. Ein allgemeines Ergebnis über die gleichmäßige Beschränktheit dieser Normen ist allerdings nicht zu erwarten, da die Normen wesentlich von den Spline-Knoten *und* den Interpolationspunkten abhängen. Wir untersuchen deshalb eine spezielle Situation.

Satz 2.31 (*Konvergenz interpolierender quadratischer Splines*)

Es sei $k = 2$ und wir wählen die Interpolationspunkte $\tau_1 := a, \tau_j := \frac{1}{2}(t_{j-2} + t_{j-1}), j = 2, \dots, n+1, \tau_{n+2} := b$. Für jedes $f \in C([a, b])$ sei P_2f der interpolierende quadratische Spline aus $S_2(\Omega_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - P_2f\|_\infty &\leq 3\omega(f; \frac{3}{2}h) \quad , \quad \forall f \in C([a, b]), \quad \text{und} \\ \|f - P_2f\|_\infty &\leq \frac{9}{4}h^3\|f'''\|_\infty \quad , \quad \forall f \in C^3([a, b]). \end{aligned}$$

Beweis: Nach Satz 2.16 und Satz 2.18 folgt:

$$\|f - P_2f\|_\infty \leq (1 + \|P_2\|)d(f, S_2(\Omega_n)) \leq 3d(f, S_2(\Omega_n)).$$

Für $f \in C([a, b])$ folgt dann die Aussage aus Satz 2.27 und für $f \in C^3([a, b])$ aus Satz 2.29. □

Für interpolierende Splines gemäß Satz 2.24 müssen wir anders vorgehen. Der Grund ist, dass die gesamte entwickelte Theorie nur zur Interpolation von Funktionen aus $C^m([a, b])$ ($m \geq 2$) entwickelt wurde. Also können Eigenschaften der Norm des zugehörigen Interpolationsoperators auf $C([a, b])$ gar nicht hergeleitet werden. Auf anderem Weg kann die folgende allgemeine Aussage bewiesen werden.

Satz 2.32 (*Konvergenz interpolierender Splines ungerader Ordnung*)

Es sei $f \in C^m([a, b])$, $m \geq 2$, und $s \in S_{2m-1}(\Omega_n)$ sei der interpolierende Spline (d.h., $s(t_j) = f(t_j), j = 0, \dots, n$), der $2m - 2$ Endbedingungen erfüllt, die (RB) implizieren. Es gelte $n + 1 \geq m$ und h sei die maximale Schrittweite von Ω_n .

Dann gilt für alle $i \in \{0, \dots, m - 1\}$ die Abschätzung

$$\|f^{(i)} - s^{(i)}\|_\infty \leq \frac{m!}{\sqrt{m}} \frac{1}{i!} h^{m-i-\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [f^{(m)}(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Wir betrachten $d := f - s \in C^m([a, b])$ und wissen $d(t_j) = 0, j = 0, \dots, n$. Wir untersuchen nun die Lage der Nullstellen von $d^{(i)}$ für $i \in \{0, \dots, m - 1\}$. Nach dem Satz von Rolle liegt in jedem Intervall (t_j, t_{j+1}) (mit $j = 0, \dots, n - 1$) mindestens eine Nullstelle von d' . In jedem Intervall (t_j, t_{j+i}) , mit $j + i \leq n$, liegen also mindestens

i Nullstellen von d' , folglich mindestens $i - 1$ Nullstellen von d'' und (sukzessive) mindestens eine Nullstelle von $d^{(i)}$.

Es sei nun $\zeta_i \in [a, b]$ so gewählt, dass $\|d^{(i)}\|_\infty = |d^{(i)}(\zeta_i)|$. Aus dem obigen Teil des Beweises folgt nun, dass ein $\xi_i \in [a, b]$ mit $d^{(i)}(\xi_i) = 0$ und $|\zeta_i - \xi_i| \leq (i + 1)h$ existiert, $\forall i = 1, \dots, m - 1$. Deshalb gilt für alle $i \in \{0, \dots, m - 1\}$:

$$\begin{aligned} \|d^{(i)}\|_\infty &= |d^{(i)}(\zeta_i) - d^{(i)}(\xi_i)| = \left| \int_{\xi_i}^{\zeta_i} d^{(i+1)}(t) dt \right| \leq (i + 1)h \|d^{(i+1)}\|_\infty \\ &\leq (i + 1)(i + 2) h^2 \|d^{(i+2)}\|_\infty \leq \frac{(m-1)!}{i!} h^{m-i-1} \|d^{(m-1)}\|_\infty \\ &= \frac{(m-1)!}{i!} h^{m-i-1} \left| \int_{\xi_{m-1}}^{\zeta_{m-1}} d^{(m)}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{(m-1)!}{i!} h^{m-i-1} (\zeta_{m-1} - \xi_{m-1})^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [d^{(m)}(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(m-1)!}{i!} h^{m-i-1} (mh)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [f^{(m)}(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{nach Satz 2.21.} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.33 Für $m = 1$ folgt aus Satz 2.32 für den linearen interpolierenden Spline s_1 : $\|f - s_1\|_\infty \leq h^{\frac{1}{2}} \|f'\|_2$, wobei $\|f'\|_2 = \left(\int_a^b (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Dies ist aber keineswegs optimal (vgl. Beweis von Satz 2.29), weder bzgl. der Konstante noch bzgl. der Ordnung bzw. h . Der Vorteil von Satz 2.32 ist seine Allgemeinheit. Die genauen Ordnungen muss man in jedem speziellen Fall extra herleiten.

Wir demonstrieren dies für interpolierende kubische Splines mit Hermite-Endbedingungen bei äquidistanter Knotenmenge Ω_n .

Satz 2.34 *Es sei $f \in C^2([a, b])$, Ω_n sei eine äquidistante Knotenmenge und \hat{s}_3 sei der interpolierende kubische Spline mit Hermite-Endbedingungen (vgl. 2.20b). Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|f - \hat{s}_3\|_\infty &\leq \frac{h^2}{2} d(f'', S_1(\Omega_n)) \quad \text{und} \\ \|f - \hat{s}_3\|_\infty &\leq \frac{h^4}{16} \|f^{(4)}\|_\infty \quad \text{falls } f \in C^4([a, b]). \end{aligned}$$

Beweis: Es sei $\hat{d} := f - \hat{s}_3$. Dann gilt mit Hilfe der Restgliedabschätzung der Polynom-Interpolation in $[t_j, t_{j+1}]$ für ein beliebiges $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, dass für jedes $x \in [t_j, t_{j+1}]$ ein $\xi \in (t_j, t_{j+1})$ existiert mit

$$\hat{d}(x) = \frac{1}{2} (x - t_j)(x - t_{j+1}) \hat{d}''(\xi), \quad (\text{vgl. Beweis von 2.29}).$$

$$\begin{aligned} \leadsto \|f - \hat{s}_3\|_\infty &\leq \frac{1}{2} \max_{j=0, \dots, n-1} \max_{x \in [t_j, t_{j+1}]} (t_{j+1} - x)(x - t_j) \|f'' - \hat{s}_3''\|_\infty \\ &\leq \frac{h^2}{8} \|f'' - \hat{s}_3''\|_\infty. \quad (*) \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass \hat{s}_3'' das Proximum an f'' in $(S_1(\Omega_n))$, $\|\cdot\|_2$ ist. Es sei $s \in S_1(\Omega_n)$ beliebig. Wir definieren die Funktion

$$\sigma(x) := \int_a^b [x-t]_+ s(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Behauptung: $\sigma \in S_3(\Omega_n)$ und $\sigma'' = s$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \int_a^x (x-t)s(t)dt = x \int_a^x s(t)dt - \int_a^x t s(t)dt \\ \leadsto \sigma'(x) &= \int_a^x s(t)dt + xs(x) - xs(x) = \int_a^x s(t)dt \\ \leadsto \sigma''(x) &= s(x) \quad \text{und} \quad \sigma \in S_3(\Omega_n). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen im Folgenden mit \tilde{s}_u den interpolierenden kubischen Spline mit Hermite-Endbedingungen an eine Funktion $u \in C^2([a, b])$.

Damit gilt $\tilde{s}_\sigma = \sigma$ und wir erhalten mit $d := f - \sigma$

$$\begin{aligned} \|f'' - \sigma''\|_2^2 &= \|f'' - s\|_2^2 = \|d''\|_2^2 = \|d'' - \tilde{s}_d''\|_2^2 + \|\tilde{s}_d''\|_2^2 \quad (\text{Satz 2.21}) \\ &= \|f'' - \sigma'' - (\hat{s}_3 - \tilde{s}_\sigma)''\|_2^2 + \|(\hat{s}_3 - \tilde{s}_\sigma)''\|_2^2 \\ &= \|f'' - \hat{s}_3''\|_2^2 + \|\hat{s}_3'' - s\|_2^2 \geq \|f'' - \hat{s}_3''\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad \|f'' - \hat{s}_3''\|_2 = \min_{s \in S_1(\Omega_n)} \|f'' - s\|_2$$

Im dritten Schritt wird gezeigt, dass für ein Proximum $\tilde{s} \in S_1(\Omega_n)$ an $g \in C([a, b])$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ gilt

$$\|g - \tilde{s}\|_\infty \leq 4 d(f, S_1(\Omega_n)).$$

Zunächst schlussfolgern wir aus dem Ergebnis des zweiten Schrittes und Satz 1.14 : $\langle f'' - \hat{s}_3'', s \rangle = 0, \forall s \in S_1(\Omega_n)$. Mit der Basis-Darstellung

$$\tilde{s} = \sum_{i=-1}^{n-1} \alpha_i B_{1i} = \hat{s}_3'' \quad \text{folgt} \quad \left\langle f'' - \sum_{i=-1}^{n-1} \alpha_i B_{1i}, B_{1j} \right\rangle = 0, \quad j = -1, \dots, n-1,$$

oder

$$\sum_{i=-1}^{n-1} \alpha_i \langle B_{1i}, B_{1j} \rangle = \langle f'', B_{1j} \rangle, \quad j = -1, \dots, n-1.$$

Es entsteht das folgende tridiagonale Gleichungssystem für die $\alpha_i, i = -1, \dots, n-1$:

$$\alpha_{j-1} \langle B_{1,j-1}, B_{1j} \rangle + \alpha_j \langle B_{1j}, B_{1j} \rangle + \alpha_{j+1} \langle B_{1,j+1}, B_{1j} \rangle = \langle f'', B_{1j} \rangle \quad (j = -1, \dots, n-1).$$

wobei $\alpha_{-2} = \alpha_n = 0$. Die Koeffizienten berechnen sich zu

$$\begin{aligned}\langle B_{1j}, B_{1j} \rangle &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} B_{1j}^2(x) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (x - t_j)^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} (t_{j+2} - x)^2 dx = \frac{2}{3}h \quad (j = -1, \dots, n-1) \\ \langle B_{1j}, B_{1,j+1} \rangle &= \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} B_{1j}(x) B_{1,j+1}(x) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} (t_{j+2} - x)(x - t_{j+1}) dx = \frac{1}{6}h \quad (j = -1, \dots, n-2)\end{aligned}$$

und das Gleichungssystem für die α_i , $i = -1, \dots, n-1$, hat die Gestalt

$$\begin{aligned}2\alpha_{-1} + \frac{1}{2}\alpha_0 &= \frac{3}{h}\langle f'', B_{1,-1} \rangle \\ \frac{1}{2}\alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \frac{1}{2}\alpha_{j+1} &= \frac{3}{h}\langle f'', B_{1j} \rangle, \quad j = 0, \dots, n-2, \\ \frac{1}{2}\alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1} &= \frac{3}{h}\langle f'', B_{1,n-1} \rangle.\end{aligned}$$

Sei $\varrho \in \{-1, \dots, n-1\}$ so gewählt, dass $|\alpha_\varrho| = \max_{i=-1, \dots, n-1} |\alpha_i|$.

Dann folgt aus dem Gleichungssystem die Abschätzung

$$\begin{aligned}2|\alpha_\varrho| &\leq \frac{3}{h} \max_{j=-1, \dots, n-1} |\langle f'', B_{1j} \rangle| + |\alpha_\varrho| \\ \text{oder} \quad |\alpha_\varrho| &\leq 3\|f''\|_\infty \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+2}} B_{1j}(x) dx \leq 3\|f''\|_\infty.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich $\|\tilde{s}\|_\infty = \max_{j=0, \dots, n} |\tilde{s}(t_j)| = \max_{i=-1, \dots, n-1} |\alpha_i| \leq 3\|f''\|_\infty$. Daraus folgt für beliebiges $s \in S_1(\Omega_n)$:

$$\begin{aligned}\|f'' - \hat{s}_3''\|_\infty &= \|f'' - \tilde{s}\|_\infty \leq \|f'' - s\|_\infty + \|\tilde{s} - s\|_\infty \\ &\leq \|f'' - s\|_\infty + 3\|f'' - s\|_\infty = 4\|f'' - s\|_\infty \\ \text{d.h.} \quad \|f'' - \hat{s}''\|_\infty &\leq 4d(f'', S_1(\Omega_n)).\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis folgt aus (*) die behauptete erste Ungleichung. Gilt $f \in C^4([a, b])$, so folgt analog zu (*) für den f'' interpolierenden linearen Spline $s \in S_1(\Omega_n)$:

$$d(f'', S_1(\Omega_n)) \leq \|f'' - s\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f^{(4)}\|_\infty$$

und die zweite Ungleichung folgt aus der bewiesenen ersten. \square

3 Wavelets

Wavelets sind *neuartige Basisfunktionen* zur Darstellung und Rekonstruktion von Funktionen auf \mathbb{R} (linguistisch: "Wellchen"). Ihr Ursprung stammt aus der Signalanalyse und den Ingenieurwissenschaften. Die klassische Approximationstheorie von Funktionen war auf

- (stückweise) Polynome (Kap. 1 und 2) bzw.
- trigonometrische Polynome (Fourier-Analyse; hier nicht behandelt) orientiert.

Die Fourier-Analyse ist Ausgangspunkt, kritischer Wegweiser, aber auch theoretische Grundlage dessen, was wir später *Wavelet-Analysis* nennen werden.

Die Fourier-Analyse von Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ arbeitet mit der speziellen analysierenden Funktion $t \mapsto \exp(it)$, die mit einem reellen Frequenzparameter α gestaucht (dilatiert) wird, d.h., mit der Funktionsfamilie $t \mapsto \exp(i\alpha t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Die trigonometrischen Funktionen schwingen unendlich lang mit derselben "ewigen" Periode. Deshalb berücksichtigen sie das lokale Verhalten einer Funktion f nur unzureichend und sind für Funktionen auf \mathbb{R} wenig geeignet.

Bei den *Wavelets* wird mehr Flexibilität dadurch erreicht, dass eine geeignete analysierende Funktion ψ (die zunächst fast beliebig wählbar ist), das sog. "Mutter-Wavelet", zur Analyse von f verschoben und gestaucht wird. Man betrachtet die Familie von Funktionen:

$$(*) \quad t \mapsto \frac{1}{|a|^{\frac{1}{2}}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $|a|^{\frac{1}{2}}$ ein später zu erklärender Normierungsfaktor.

Beispiel 3.1 (*Haar-Wavelet*)

Die folgende Funktion

$$\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad \text{supp } \psi_H = [0, 1].$$

heißt *Haar-Wavelet*. Aus der obigen Konstruktion entstehen mit $a = 2^j$ und $b = k2^j$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) die (*Wavelet-*) Funktionen

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{-\frac{j}{2}} \psi_H\left(\frac{t - k2^j}{2^j}\right) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi_H(2^{-j}t - k), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

mit

$$\text{supp } \psi_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j], \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei bedeutet ein großes (kleines) $j \in \mathbb{Z}$, dass eine "lang- (kurz-) welligere" Waveletfunktion vorliegt. Später zeigen wir in Kap. 3.3, dass $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ darstellen. Also ist eine Fourier-Entwicklung (vgl. 1.17) von Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ nach diesem Basissystem möglich (Haar 1910).

Ziel dieses Kapitels ist eine Einführung in die Wavelet-Analyse und dabei insbesondere

- der Ausbau des obigen allgemeinen Ansatzes nebst Suche nach geeigneten Wavelets ψ ;
- die Darstellung einer allgemeinen Theorie solcher Basis-Systeme, einschließlich der sog. Multiskalen-Analyse;
- die Beschreibung schneller Algorithmen zur Berechnung von Koeffizienten von Wavelets bzw. zur Rekonstruktion der Funktion aus diesen.

Literatur: Blatter, Chui, Daubechies, Louis/Maaß/Rieder.

3.1 Grundlagen der Fourier-Analyse

Die Fourier-Analyse ist eine wichtige theoretische Basis und zugleich kritischer Wegweiser in Richtung Wavelet-Analyse.

Wir betrachten in diesem Kapitel die folgenden linearen normierten bzw. unitären Räume von Funktionen über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen:

$$L_p(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist messbar und } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \text{ bzw. } \text{esssup}|f(x)| < \infty\},$$

wobei $1 \leq p < \infty$ bzw. $p = \infty$ und $L_2(\mathbb{R})$ versehen wird mit $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$

und $L_p(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < \infty$) bzw. $\|f\|_{\infty} = \text{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Dabei werden Funktionen identifiziert, die fast überall im Sinne des Lebesgueschen Maßes übereinstimmen.

Alle diese Räume sind vollständig, d.h., Banach- bzw. Hilberträume.

Definition 3.2 Die Fourier-Transformierte $\mathfrak{F}f$ einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) := (\mathfrak{F}f)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) f(x) dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.3

- \mathfrak{F} ist eine lineare beschränkte Abbildung von $L_1(\mathbb{R})$ in $L_{\infty}(\mathbb{R})$.
- $\forall f \in L_1(\mathbb{R})$ ist \hat{f} gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} und es gilt $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.
- Gilt sogar $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| dx < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist \hat{f} k -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\hat{f}^{(k)} = (-i)^k \hat{f}_k, \text{ wobei } f_k(x) = x^k f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$ k -mal differenzierbar mit $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, so gilt die Formel

$$\mathfrak{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k \mathfrak{F}(f)(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

a) $\forall f \in L_1(\mathbb{R})$ und $\forall \omega \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.$$

Also gilt $\|\hat{f}\|_{\infty} = \|\mathfrak{F}f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.

\mathfrak{F} ist außerdem linear und folglich ein linearer beschränkter Operator von $L_1(\mathbb{R})$ in $L_{\infty}(\mathbb{R})$.

b) Es seien $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-i(\omega + \delta)x) - \exp(-i\omega x)| |f(x)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-i\delta x) - 1| |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-i\delta x) - 1| |f(x)| dx.$$

Wir untersuchen nun das Verhalten des Integrals auf der rechten Seite für $\delta \rightarrow 0$ mit Hilfe des Lebesgueschen Satzes. Zunächst ist klar:

$$|\exp(-i\delta x) - 1| |f(x)| \leq 2|f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0,$$

d.h., es existiert eine integrierbare Majorante mit $2|f(\cdot)|$. Außerdem gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\exp(-i\delta x) - 1| |f(x)| = 0.$$

Also folgt aus dem Lebesgueschen Satz

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| = 0$$

und \hat{f} ist gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .

Wir beweisen nun den zweiten Teil der Aussage. Falls f differenzierbar mit $f' \in L_1(\mathbb{R})$ ist, so folgt aus d), dass

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{|\omega|} |\hat{f}'(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|} \|\hat{f}'\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\omega|} \|f'\|_1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\rightsquigarrow |\hat{f}(\omega)| \rightarrow 0 \quad \text{falls } |\omega| \rightarrow \infty.$$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Da die Menge aller auf \mathbb{R} differenzierbaren Funktionen aus $f \in L_1(\mathbb{R})$, deren Ableitung ebenfalls zu $L_1(\mathbb{R})$ gehört, dicht in $L_1(\mathbb{R})$ ist, existiert zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $g \in L_1(\mathbb{R})$ mit $g' \in L_1(\mathbb{R})$ und $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Dann gilt nach a) für jedes $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &\leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \leq \|f - g\|_1 + \frac{1}{|\omega|} \|g'\|_1 \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{|\omega|} \|g'\|_1 \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.

- c) Wir beweisen die Aussage zunächst für $k = 1$. Für $h \neq 0$ gilt für den Differenzenquotienten:

$$\frac{1}{h}(\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-i\omega x) \frac{\exp(-ihx) - 1}{h} dx.$$

Der Integrand g_h des Integrals auf der rechten Seite erlaubt die Abschätzung

$$|g_h(x)| \leq |f(x)||x| \quad (\forall h \neq 0).$$

Nach dem Lebesgueschen Satz existiert deshalb der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \rightarrow 0$, d.h., \hat{f} ist differenzierbar und es gilt

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega x) f(x) (-ix) dx.$$

Also gilt: $\hat{f}'(\omega) = -i\hat{f}_1(\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, wobei $f_1(x) := xf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Aus Teil (b) folgt, daß \hat{f}' stetig ist. Die Aussage für $k > 1$ folgt durch wiederholte Anwendung der obigen Überlegung.

- d) Wir führen den Beweis zunächst für $k = 1$. Es sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ differenzierbar mit $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt für jedes $N > 0$ mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N \exp(-i\omega x) f'(x) dx &= [\exp(-i\omega x) f(x)]_{-N}^N - \int_{-N}^N (-i\omega) \exp(-i\omega x) f(x) dx \\ &= [\exp(-i\omega x) f(x)]_{-N}^N + i\omega \int_{-N}^N \exp(-i\omega x) f(x) dx \end{aligned}$$

Daraus folgt für $N \rightarrow \infty$ wegen $|f(x)| \rightarrow 0$ falls $|x| \rightarrow \infty$:

$$(\mathfrak{F}f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) = i\omega(\mathfrak{F}f)(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Für $k > 1$ folgt die Aussage durch wiederholtes Anwenden dieser Überlegung. \square

Bemerkung 3.4 Trotz der Aussage in Satz 3.3d) folgt aus $f \in L_1(\mathbb{R})$ keineswegs

$$\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}) \quad !$$

Dies sieht man an folgendem Beispiel:

$$f(x) := \exp(-x)\chi_{[0,\infty)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \hat{f}(\omega) &= (\mathfrak{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-i\omega x) \exp(-x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-(i\omega + 1)x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{1+i\omega} [\exp(-(1+i\omega)x)]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{1+i\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\omega|}$ für $|\omega| > 0$ groß, gilt $\hat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$.

Definition 3.5 Es sei $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ die Fourier-Transformierte einer gewissen Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$. Dann ist die inverse Fourier-Transformierte von \hat{f} definiert durch

$$(\mathfrak{F}^{-1}\hat{f})(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Im Folgenden beschäftigen wir uns nun mit den Fragen, wann $f = \mathfrak{F}^{-1}\hat{f}$ gilt und wie der Wertebereich von \mathfrak{F} charakterisiert werden kann. Als Beweishilfsmittel benötigen wir dazu zunächst weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Eigenschaft 3.6

a) Es sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $(T_h f)(x) := f(x - h)$, $\forall x \in \mathbb{R} \forall h \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\mathfrak{F}(T_h f))(\omega) = \exp(-i\omega h) (\mathfrak{F}f)(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \forall h \in \mathbb{R}.$$

b) Es seien $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ und $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$, das sogenannte Faltungsprodukt. Dann gilt

$$(\mathfrak{F}(f * g))(\omega) = \sqrt{2\pi} (\mathfrak{F}f)(\omega) (\mathfrak{F}g)(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

a) Mit f gehört natürlich auch $T_h f$ zu $L_1(\mathbb{R})$ und es gilt $\forall h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}(T_h f))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) f(x-h) dx \quad (\text{Substitution: } t = x-h) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(t+h)) f(t) dt = \exp(-i\omega h) \hat{f}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Wegen $|(f * g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx \right) dt = \|g\|_1 \|f\|_1 \end{aligned}$$

d.h., $f * g$ gehört zu $L_1(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{F}(f * g)$ ist wohl-definiert.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(f * g))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) f(x-t) dx \right) g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{F}(T_t f))(\omega) g(t) dt \\ (\text{wegen a)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) g(t) dt \cdot \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

Als nächstes benötigen wir eine approximative Faltungs-Identität, d.h., Funktionen $\{e_\alpha : \alpha > 0\}$ in $L_1(\mathbb{R})$, so dass $f * e_\alpha \approx f$ für hinreichend kleines α gilt.

Lemma 3.7 *Es sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $e_\alpha(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right)$, $\forall \alpha > 0$. Dann gilt $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} (f * e_\alpha)(x) = f(x)$ in jedem $x \in \mathbb{R}$, in dem f stetig ist.*

Beweis: Es sei f stetig in x und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir wählen nun $\eta > 0$, so dass

$$|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \quad \text{mit } |t| \leq \eta.$$

Ferner gilt für beliebiges $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e_\alpha(x) dx &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right) dx \quad (\text{Subst.: } t = \frac{x}{2\sqrt{\alpha}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = 1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für bel. $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} |(f * g_\alpha)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x)) e_\alpha(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)| e_\alpha(t) dt + \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t) - f(x)| e_\alpha(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} e_\alpha(t) dt + \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t)| e_\alpha(t) dt + \int_{|t| \geq \eta} |f(x)| e_\alpha(t) dt \\ &\leq \varepsilon + \|f\|_1 \max_{|t| \geq \eta} e_\alpha(t) + |f(x)| \int_{|t| \geq \eta} e_\alpha(t) dt \quad (\text{Subst.: } \tau = \frac{t}{\sqrt{\alpha}}) \\ &= \varepsilon + \|f\|_1 e_\alpha(\eta) + |f(x)| \int_{|\tau| \geq \frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}} e_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Für $\alpha \rightarrow 0+$ gilt $e_\alpha(\eta) \rightarrow 0$, und $\int_{|\tau| \geq \frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}} e_1(\tau) d\tau \rightarrow 0$ und die Aussage ist bewiesen. \square

Satz 3.8 *Es seien $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $\hat{f} := \mathfrak{F}f \in L_1(\mathbb{R})$. Ist f in $x \in \mathbb{R}$ stetig, so gilt*

$$f(x) = (\mathfrak{F}^{-1}\hat{f})(x).$$

Beweis: In einer Vorbetrachtung zeigen wir die Gültigkeit der folgenden Formel:

Behauptung: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) \quad (a > 0).$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $h(y) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + xy) dx$, $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow h(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x - \frac{y}{2a}\right)^2 + \frac{y^2}{4a}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{y^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x - \frac{y}{2a}\right)^2\right) dx \quad (\text{Subst.: } t = \sqrt{a}\left(x - \frac{y}{2a}\right)) \\ &= \exp\left(\frac{y^2}{4a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{y^2}{4a}\right) =: \tilde{h}(y). \end{aligned}$$

Die Funktionen h und \tilde{h} können beide auf \mathbb{C} fortgesetzt werden. Da sie aber auf \mathbb{R} übereinstimmen, bleibt dies auch auf \mathbb{C} richtig. Für $y = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, folgt daraus die behauptete Formel.

Im Folgenden sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass f in x stetig ist. Wir betrachten die Funktion

$$g(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iyx - \alpha y^2) \quad (y \in \mathbb{R})$$

und erhalten aus unserer Vorbetrachtung

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega y) g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega - x)y) \exp(-\alpha y^2) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{(\omega-x)^2}{4\alpha}\right) = e_{\alpha}(x - \omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}) \\ \leadsto \quad (f * e_{\alpha})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e_{\alpha}(x - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{g}(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ity) f(t) g(y) dt dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx) \hat{f}(y) \exp(-\alpha y^2) dy. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun das Verhalten dieser Identität für $\alpha \rightarrow 0+$. Nach Lemma 3.7 konvergiert die linke Seite der Identität gegen $f(x)$.

Für die rechte Seite verwenden wir wieder den Satz von Lebesgue. Der Integrand besitzt die integrierbare Majorante $|\hat{f}(\cdot)|$ und konvergiert punktweise gegen $\exp(iyx)\hat{f}(y)$ falls $\alpha \rightarrow 0+$. Also konvergiert die rechte Seite gegen

$$(\mathfrak{F}^{-1}\hat{f})(x)$$

und die Aussage ist bewiesen. □

Unser nächstes Ziel ist es, die Fourier-Transformation auch für Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ zu definieren sowie den Wertebereich von \mathfrak{F} besser zu verstehen. Dazu benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 3.9 *Es sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ und $F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\overline{f(y)}dy$ ($x \in \mathbb{R}$) die sog. Autokorrelationsfunktion von f . Dann ist F gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .*

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\eta \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir erhalten aus der Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} |F(x+\eta) - F(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+\eta+y) - f(x+y))\overline{f(y)}dy \right| \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x+\eta) - F(x)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y+\eta) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2. \end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Dann existiert eine stetige Funktion $g \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ (vgl. Theorem 2.4.14 in R.B. Ash: Measure Integration and Functional Analysis, Academic Press, New York 1972), da die stetigen Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ sind. Mit Hilfe der Minkowski-Ungleichung folgt daraus

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y + \eta) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y + \eta) - g(y + \eta)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y + \eta) - g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\|f - g\|_2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y + \eta) - g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für das verbleibende Integral wenden wir wieder den Lebesgueschen Satz für $\eta \rightarrow 0$ an. Der Integrand konvergiert punktweise gegen 0 und ist gleichmäßig beschränkt, da g als stetige Funktion aus $L_2(\mathbb{R})$ beschränkt sein muss. Also folgt

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y + \eta) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

und die Aussage folgt, da $\varepsilon > 0$ bel. gewählt war. \square

Satz 3.10 *Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Dann gilt $\hat{f} = \mathfrak{F}f \in L_2(\mathbb{R})$ und*

$$\|\mathfrak{F}f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \quad (\text{Parseval-Identität}).$$

Beweis: Wir verwenden wieder die approximativen Faltungs-Identitäten $\{e_\alpha : \alpha > 0\}$ aus Lemma 3.7 und die zugehörigen Fourier-Transformierten

$$\hat{e}_\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha\omega^2), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{vgl. Beweis von Satz 3.8}).$$

Da \hat{f} stetig und beschränkt auf \mathbb{R} ist (Satz 3.3), gilt

$$\hat{e}_\alpha(\cdot) |\hat{f}(\cdot)|^2 \in L_1(\mathbb{R}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\alpha(x) \hat{f}(x) \overline{\hat{f}(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iyx) f(y) dy \right) \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) f(u) du \right)} \hat{e}_\alpha(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix(u-y)) \hat{e}_\alpha(x) dx \right\} du dy \\ (\text{Satz 3.8}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} e_\alpha(u-y) du dy \quad (\text{Subst. } y = x + u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \overline{f(u)} du \right\} e_\alpha(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e_\alpha(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F * e_\alpha(0), \end{aligned}$$

wobei F die Autokorrelationsfunktion von f ist. Aus Lemma 3.7 folgt zunächst

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0),$$

da F stetig in 0 ist. Außerdem folgt aus dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \{\hat{e}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2\} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2^2 \leq \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{e}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

und folglich $\hat{f} = \mathfrak{F}f \in L_2(\mathbb{R})$. Schließlich folgt aus dem Lebesgueschen Satz wegen $0 \leq \hat{e}_\alpha |\hat{f}|^2 \leq |\hat{f}|^2$ auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2^2. \quad \square$$

Folgerung 3.11 \mathfrak{F} ist ein linearer beschränkter Operator von $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ mit $\|\mathfrak{F}\| = 1$. Überdies existiert eine normerhaltende Fortsetzung von \mathfrak{F} auf ganz $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt sofort aus Satz 3.10. Außerdem ist die Menge $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ und folglich lässt sich \mathfrak{F} auf $L_2(\mathbb{R})$ normerhaltend fortsetzen. Dies ist wie folgt möglich: Sei $f \in L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$ und (f_n) eine Folge aus $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ mit $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$. Dann ist $(\mathfrak{F}f_n)$ eine Fundamentalfolge in $L_2(\mathbb{R})$ und man kann definieren

$$\mathfrak{F}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{F}f_n.$$

Diese Fortsetzung hat alle gewünschten Eigenschaften. Die Dichtheit von $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ sieht man wie folgt: Ist $f \in L_2(\mathbb{R})$, so gehören die *gestutzten* Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad |x| \leq n \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

zu $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{-n} |f(x)|^2 dx + \int_n^{\infty} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Satz 3.12 (Plancherel-Formel)

Die Abbildung $\mathfrak{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ gemäß Folgerung 3.11 ist bijektiv und für alle Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ gilt

$$(i) \quad \langle f, g \rangle = \langle \mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g \rangle \quad \text{und} \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathfrak{F}g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}f(x) g(x) dx.$$

(Die Relation (i) heißt Parseval-Identität.)

Beweis: Nach Satz 3.10 gilt für jedes $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$: $\|\hat{h}\|_2^2 = \|h\|_2^2$. Ist $h \in L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$ und (h_n) eine Folge in $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ mit $\|h_n - h\|_2^2 \rightarrow 0$, so gilt $\mathfrak{F}h = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{F}h_n$, d.h., auch

$$\|\hat{h}\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{h}_n\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_2^2 = \|h\|_2^2.$$

Also gilt die Identität: $\|\hat{h}\|_2^2 = \|h\|_2^2, \forall h \in L_2(\mathbb{R})$.

Es seien nun $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ beliebig gewählt. Wir verwenden nun die obige Identität für

$$h \in \{f + g, f - g, f + ig, f - ig\}$$

sowie die Formel für das Skalarprodukt im komplexen Hilbertraum

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2) + \frac{1}{4i}(\|f - ig\|_2^2 - \|f + ig\|_2^2)$$

und erhalten

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(\|\hat{f} + \hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f} - \hat{g}\|_2^2) + \frac{1}{4i}(\|\hat{f} - i\hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f} + i\hat{g}\|_2^2) = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Wegen der obigen Identität ist \mathfrak{F} natürlich auch injektiv.

Die Relation (ii) gilt nach dem Beweis von Satz 3.8 für beliebige $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Wieder kann die Dichtheit von $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ ausgenutzt werden, um (ii) für bel. $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ zu zeigen.

Es bleibt zu zeigen: \mathfrak{F} ist surjektiv.

Dazu sei $g \in L_2(\mathbb{R})$ bel. gewählt. Wir zeigen: $\exists f \in L_2(\mathbb{R})$ mit $g = \mathfrak{F}f$.

Dazu benötigen wir noch einige Vorbereitungen: Für $h \in L_2(\mathbb{R})$ definieren wir $h^-(x) := h(-x)$ ("Reflektion" von h). Dann gilt:

$$h^- \in L_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{F}(\overline{h^-}) = \overline{\mathfrak{F}(h)}, \quad \mathfrak{F}(h^-) = \hat{h}^-.$$

Beweis: $h^- \in L_2(\mathbb{R})$ ist klar; zum Beweis der anderen Aussagen nehmen wir o.B.d.A. an, dass $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ (ansonsten mit Folgen wie in 3.11 argumentieren). Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\overline{h^-})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) \overline{h(-x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega y) \overline{h(y)} dy \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega y) h(y) dy} = \overline{\mathfrak{F}(h)(\omega)} \rightsquigarrow \hat{h}^- = \widehat{\overline{h^-}} \\ \mathfrak{F}(h^-)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) h(-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(-\omega)y) h(y) dy = \hat{h}(-\omega). \end{aligned}$$

Behauptung: $g = \mathfrak{F}f = \hat{f}$, wobei $f(x) := (\mathfrak{F}g^-)(x) = \hat{g}(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir zeigen $\|g - \hat{f}\|_2 = 0$. Unter Verwendung der obigen Vorbereitungen sowie

von (i) und (ii) gilt:

$$\begin{aligned}\|g - \hat{f}\|_2^2 &= \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle g, \hat{f} \rangle + \|\hat{f}\|_2^2 = \|\hat{g}\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle g, \hat{f} \rangle + \|f\|_2^2 \\ \langle g, \hat{f} \rangle &= \langle g, \widehat{f^-} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixu) \overline{f^-(u)} du dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) \overline{f^-(u)} du = \langle \hat{g}, f^- \rangle = \langle \hat{g}, \hat{g} \rangle = \|\hat{g}\|_2^2 \\ \rightsquigarrow \|g - \hat{f}\|_2^2 &= -\|-\hat{g}\|_2^2 + \|\hat{g}^-\|_2^2 = 0.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.13 Definiert man die Fourier-Transformation \mathfrak{F} auf $L_1(\mathbb{R}^m)$ durch

$$(\mathfrak{F}f)(\omega) := (2\pi)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-i\langle \omega, x \rangle) f(x) dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^m, \forall f \in L_1(\mathbb{R}^m),$$

so lassen sich alle Ergebnisse dieses Kapitels einschließlich der Plancherel-Identität sinngemäß verallgemeinern (vgl. Daubechies, Louis/Maaß/Rieder).

3.2 Wavelets

Die Einführung in die Wavelet-Analyse beginnt mit dem Begriff des Wavelets und mit der Wavelet-Transformation in Kapitel 3.3. Langfristig suchen wir nach Funktionen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, so dass die durch Translation und Dilatation abgeleiteten Funktionen

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k), \quad t \in \mathbb{R},$$

in $L_2(\mathbb{R})$ eine hinreichend große Familie darstellen und für die Zielstellungen zu Beginn des Kapitels 3 geeignet sind. Der Normierungsfaktor hat dabei die Bedeutung, dass

$$\|\psi_{j,k}\|_2^2 = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^{-j}t - k)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|_2^2$$

gilt, d.h., dass diese Funktionen also alle normiert sind, falls $\|\psi\|_2 = 1$.

Kurzfristig schauen wir zunächst nach Funktionen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, die *Wellencharakter* besitzen.

Definition 3.14 Eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, die die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < C_\psi := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt *Wavelet*. (Hierbei ist $\hat{\psi} \in L_2(\mathbb{R})$ die Fourier-Transformierte zu ψ .)

Eigenschaften 3.15

- a) Ist $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet, so gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ (d.h., ψ hat Wellen-Charakter).

b) Die Menge aller Wavelets ist dicht in $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis:

a) Wegen $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{\psi}$ stetig, insbesondere in jeder Umgebung von $\omega = 0$ (Satz 3.3). Es sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{C_\psi}{2\pi} &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{|\omega| \geq \varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{\psi}\|_2^2 \end{aligned}$$

$\leadsto C_\psi$ ist genau dann endlich, wenn $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ endlich ist.

\leadsto Es muss notwendigerweise $\hat{\psi}(0) = 0$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ gelten.

b) Es sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ beliebig, $f \neq 0$ (o.B.d.A.). Wir zeigen, dass f Grenzwert einer Folge von Wavelets in $L_2(\mathbb{R})$ ist. Wir wissen $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ und definieren die Funktion $f_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R})$ für alle $\varepsilon > 0$ durch ihre Fourier-Transformierten

$$\hat{f}_\varepsilon(\omega) := \begin{cases} \hat{f}(\omega) & , \quad |\omega| > \varepsilon \\ 0 & , \quad |\omega| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

was nach Satz 3.12 möglich ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{C_{f_\varepsilon}}{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}_\varepsilon(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{|\omega| \geq \varepsilon} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{f}\|_2^2, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

$\leadsto f_\varepsilon$ ist ein Wavelet für jedes $\varepsilon > 0$. Außerdem gilt nach Satz 3.12

$$\|f - f_\varepsilon\|_2^2 = \|\hat{f} - \hat{f}_\varepsilon\|_2^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

□

Bemerkung 3.16 Eigenschaft 3.2a) rechtfertigt die Bezeichnung "Wavelet". Sucht man also eine Funktion, die ein Kandidat für ein Wavelet ist, so sollte man zuerst auf die Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ achten. Die Bedeutung der (stärkeren) Zulässigkeitsbedingung in Definition 3.14 wird später klar.

Eigenschaft 3.2b) zeigt an, dass es ausreichend viele Wavelets gibt. Trotzdem werden wir später einigen Aufwand betreiben, um geeignete Wavelets zu konstruieren.

Wir beginnen mit einfachen Beispielen, nachdem wir einfache Kriterien für und Methoden zur Konstruktion von Wavelets bereitgestellt haben.

Satz 3.17

- a) Es sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein k -fach ($k \geq 1$) differenzierbare Funktion und es gelte $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\varphi^{(k)} \in L_2(\mathbb{R})$ und $\varphi^{(k)} \neq 0$. Dann ist $\psi := \varphi^{(k)}$ ein Wavelet.
- b) Es sei $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, mit $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ und $0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$ für ein $\beta > \frac{1}{2}$. Dann ist ψ ein Wavelet.
- c) Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine Funktion mit kompaktem Träger $\text{supp } \psi \neq \emptyset$. Dann ist ψ ein Wavelet g.d.w. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$.

Wir verschieben den Beweis des Satzes ein wenig und leiten zunächst mit seiner Hilfe einfache Beispiele für Wavelets her.

Beispiel 3.18

a) Haar-Wavelet: $\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ (vgl. 3.1)

$\leadsto \psi_H \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\|\psi_H\|_2 = 1$, $\text{supp } \psi_H = [0, 1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(x) dx = 0$.

\leadsto nach Satz 3.17c) ist ψ_H ein Wavelet.

Schließlich berechnen wir $\hat{\psi}_H$ direkt und zeigen, dass die Zulässigkeitsbedingung erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_H(\omega) &= \int_0^1 \exp(-i\omega x) \psi_H(x) dx = \frac{1}{i\omega} \left\{ 2 \exp\left(-\frac{i\omega}{2}\right) - 1 - \exp(-i\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{i\omega} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2^{-k+1} - 1)(i\omega)^k}{k!} \right\} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2^{-k+1} - 1)(i\omega)^{k-1}}{k!} \\ \leadsto C_{\psi_H} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}_H(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad \text{ist endlich.} \end{aligned}$$

b) Sombbrero-Funktion: $\psi_S(x) = \left. \begin{aligned} &(1 - x^2) \exp(-\frac{x^2}{2}) \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} \exp(-\frac{x^2}{2}) \end{aligned} \right\} \forall x \in \mathbb{R}.$

Wegen $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ für $\varphi(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2})$, $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\varphi'' \in L_2(\mathbb{R})$ folgt aus Satz 3.17a), dass $\psi_S = \varphi''$ ein Wavelet ist.

Beweis: (von Satz 3.17)

- a) Nach Satz 3.3c) gilt durch iterative Anwendung falls $\varphi, \varphi^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$:

$$|\hat{\psi}(\omega)| = |\widehat{\varphi^{(k)}}(\omega)| = |\omega|^k |\hat{\varphi}(\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Die Erweiterung dieser Formel (für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$) auf den Fall $\varphi, \varphi^{(k)} \in L_2$ erfolgt wieder durch geeignete Limesbetrachtungen.

$$\begin{aligned} \leadsto \quad \frac{C_\psi}{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{-1}^1 |\omega|^{2k-1} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega + \int_{|\omega| \geq 1} \frac{|\widehat{\varphi^{(k)}}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &\leq \|\hat{\varphi}\|_2^2 + \|\widehat{\varphi^{(k)}}\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi^{(k)}\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

b) O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ gilt. Deshalb gilt $(1 + |x|)^\beta \leq 1 + |x|^\beta, \forall x \in \mathbb{R}$, und die Funktion $(1 + |\cdot|)^\beta |\psi(\cdot)|$ gehört zu $L_1(\mathbb{R})$.

Wir betrachten die Funktion $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Psi(x) := \int_{-\infty}^x \psi(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$, Ψ ist fast überall differenzierbar und es gilt $\Psi' = \psi$. Für $x \leq 0$ gilt außerdem die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Psi(x)| &\leq \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt. \end{aligned}$$

Für $x > 0$ gilt wegen $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ auch $\Psi(x) = - \int_x^{\infty} \psi(t) dt$ und deshalb

$$\begin{aligned} |\Psi(x)| &\leq \int_x^{\infty} |\psi(t)| dt \leq \int_x^{\infty} \frac{(1+|t|)^\beta}{(1+|x|)^\beta} |\psi(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt. \end{aligned}$$

Also gilt $|\Psi(x)|^2 \leq \text{const} \frac{1}{1+|x|^{2\beta}}, \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$. Da auch $\Psi' \in L_2(\mathbb{R})$ gilt, lässt sich Teil a) anwenden, der richtig bleibt (insbesondere bereits 3.3c)), falls Ψ (nur) fast überall differenzierbar ist.

c) Hat ψ einen kompakten Träger, so gilt $\psi \in L_1(\mathbb{R})$. Deshalb folgt die Richtung (\Rightarrow) aus Eigenschaften 3.2a). Die andere Richtung (\Leftarrow) der Aussage folgt aber aus b), da dann das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\beta |\psi(x)| dx$ für alle $\beta \geq 0$ endlich ist.

□

3.3 Wavelet-Transformation

Definition 3.19 Für jedes Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ist die (kontinuierliche) Wavelet-Transformation W_ψ auf $L_2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$(W_\psi f)(b, a) := (|a|C_\psi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \forall f \in L_2(\mathbb{R}),$$

wobei C_ψ die Zulässigkeits-Konstante aus Definition 3.14 ist.

Bemerkung 3.20 Führt man für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, die Bezeichnung

$$\psi_{b,a}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ein, so lässt sich die Wavelet-Transformation kürzer wie folgt schreiben:

$$(W_\psi f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle f, \psi_{b,a} \rangle, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \forall f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Für die eingangs des Kapitels 3.2 eingeführte Funktionsfamilie $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ entsteht dann mit Hilfe der Wavelet-Transformation

$$(*) \quad (W_\psi f)(k2^j, 2^j) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}) \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

In Analogie zu den Fourier-Koeffizienten werden wir die $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ *Wavelet-Koeffizienten* nennen. Die Relation (*) entspricht der (inversen) diskreten Fourier-Transformation.

Als nächstes Ziel leiten wir eine "Isometrie"-Eigenschaft der Wavelet-Transformation her, die eine Analogie zu Satz 3.12 darstellt, und wir rekonstruieren eine Funktion aus ihrer Wavelet-Transformierten (als Entsprechung für Satz 3.8).

Dabei bietet sich natürlicherweise an, $W_\psi f(\cdot, \cdot)$ als Funktion auf $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (um $a = 0$ auszuschließen) zu verstehen und $f \mapsto W_\psi f$ als Abbildung von $L_2(\mathbb{R})$ in einen L_2 -Raum auf \mathbb{R}_*^2 aufzufassen, wobei bei letzterem das Maß so gewählt wird, dass es geeignete Eigenschaften auf \mathbb{R}_*^2 besitzt (vgl. auch Blatter, Kap. 3.2).

Satz 3.21 Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet und W_ψ die zugehörige Wavelet-Transformation. Dann ist die Abbildung $W_\psi : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_*^2, \frac{1}{a^2} da db)$ injektiv und es gilt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \frac{1}{a^2} da db \\ &= \langle W_\psi f, W_\psi g \rangle_{L_2(\mathbb{R}_*^2, \frac{1}{a^2} da db)}, \quad \forall f, g \in L_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Beweis: Wir beginnen mit einigen nützlichen Schlussfolgerungen aus Satz 3.12:

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(b, a) &= \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{b,a} \rangle \\ \overline{(W_\psi g)(b, a)} &= \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle \psi_{b,a}, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle \hat{\psi}_{b,a}, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

für beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{b,a}(\omega) &= (2\pi|a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= a(2\pi|a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(ax+b)) \psi(x) dx = a|a|^{-\frac{1}{2}} \exp(-i\omega b) \hat{\psi}(a\omega).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir zunächst für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und bel. $f, g \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] db &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{b,a} \rangle \langle \hat{\psi}_{b,a}, \hat{g} \rangle db \\ &= \frac{|a|}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \exp(ixb) \overline{\hat{\psi}(ax)} dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iyb) \hat{\psi}(ay) \overline{\hat{g}(y)} dy \right\} db \\ &= \frac{|a|}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixb) \hat{\psi}(ax) \overline{\hat{f}(x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iyb) \hat{\psi}(ay) \overline{\hat{g}(y)} dy \right\} db \\ &= \frac{2\pi|a|}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{F}(b)} \hat{G}(b) db = \frac{2\pi|a|}{C_\psi} \langle \hat{G}, \hat{F} \rangle = \frac{2\pi|a|}{C_\psi} \langle G, F \rangle,\end{aligned}$$

wobei $F(x) := \hat{\psi}(ax) \overline{\hat{f}(x)}$ und $G(y) := \hat{\psi}(ay) \overline{\hat{g}(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, und für die letzte Identität wieder Satz 3.12 benutzt wurde. Also folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] \frac{1}{a^2} dadb \\ &= \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} |\hat{\psi}(ax)|^2 dx \right\} da \\ &= \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{|a|} dadx \right. \\ &= \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega dx = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle.\end{aligned}$$

Für $f = g$ folgt daraus insbesondere die Injektivität von W_ψ als Abbildung von $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R}_*, \frac{1}{a^2} dadb)$. \square

Satz 3.22 *Es sei $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet, das fast überall stetig ist, und W_ψ die zugehörige Wavelet-Transformation. Dann gilt für jedes $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ und jeden Stetigkeitspunkt x von f*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(b, a) \psi_{b,a}(x) \frac{1}{a^2} dadb,$$

wobei $\psi_{b,a}$ wie in Bemerkung 3.20 definiert ist.

Beweis: Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ und x ein Stetigkeitspunkt von f . Wir verwenden wieder die "Gaußschen" Funktionen e_α aus Lemma 3.7 und betrachten

$$\langle f, e_\alpha(\cdot - x) \rangle = f * e_\alpha(x).$$

Dann folgt aus Lemma 3.7 und Satz 3.21:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle f, e_\alpha(\cdot - x) \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(b, a) \overline{\langle e_\alpha(\cdot - x), \psi_{b,a} \rangle} \frac{1}{a^2} da db \\
&= \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(b, a) \langle \psi_{b,a}, e_\alpha(\cdot - x) \rangle \frac{1}{a^2} da db.
\end{aligned}$$

Da ψ fast überall stetig ist, ist $\psi_{b,a}(\cdot) = (C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)$ für fast alle a, b in x stetig. Also gilt für fast alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \psi_{b,a}, e_\alpha(\cdot - x) \rangle = \psi_{b,a}(x) \quad (\text{Lemma 3.7})$$

Damit und dem Lebesgueschen Satz wird das Resultat plausibel. Allerdings erfordert die Vertauschung von Integral und Limes noch eine diffizile Argumentation, wofür wir auf Daubechies, Proposition 2.4.2, verweisen. \square

Uns interessieren nun die asymptotischen Eigenschaften der Funktion

$$(b, a) \longmapsto (W_\psi f)(b, a) \quad \text{für } a \rightarrow 0.$$

Hintergrund dafür ist, dass in den zu $|a| \ll 1$ gehörenden Werten von $W_\psi f$ Informationen über die hochfrequenten bzw. kurzlebigen Anteile von f gespeichert sind. Würde nun $(W_\psi f)(b, a)$ für $a \rightarrow 0$ "schnell" abklingen, sind diese Informationen nicht so wichtig, um das Signal f aus den Wavelet-Koeffizienten $(W_\psi f)(k2^j, 2^j)$ rekonstruieren zu können, d.h. die Wavelet-Koeffizienten mit $j \rightarrow -\infty$ wären nicht wesentlich und bräuchten nicht gespeichert werden.

Satz 3.23 *Es seien $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet mit $t\psi \in L_1(\mathbb{R})$, $f \in L_2(\mathbb{R})$ beschränkt und an der Stelle $t = b$ Hölderstetig mit Rate $\alpha \in (0, 1]$, d.h., es existiere eine Konstante $L > 0$ und eine Umgebung U von b , so dass*

$$|f(t) - f(b)| \leq L|t - b|^\alpha, \quad \forall t \in U.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|(W_\psi f)(b, a)| \leq C|a|^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Beweis: Da f beschränkt ist, existiert eine Konstante $\hat{L} \geq L$, so dass

$$|f(t) - f(b)| \leq \hat{L}|t - b|^\alpha, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da nach Voraussetzung auch $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ gilt, folgt $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ (3.2a)) und damit für jedes $a \neq 0$:

$$(C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi\left(\frac{t - b}{a}\right)} dt = 0$$

und

$$\begin{aligned}
(W_\psi f)(b, a) &= (C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(b)) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\
\rightsquigarrow |(W_\psi f)(b, a)| &\leq \hat{L} (C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |t-b|^\alpha |\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)| dt \quad (\text{Subst.: } t = b + as) \\
&= \frac{\hat{L}}{\sqrt{C_\psi}} |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^\alpha |\psi(s)| ds \\
&\leq \frac{\hat{L}}{\sqrt{C_\psi}} |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|) |\psi(s)| ds.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist aber $\int_{-\infty}^{\infty} (1+|s|) |\psi(s)| ds$ endlich und alles ist bewiesen. \square

Folgerung 3.24 *Es seien $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet mit $t\psi \in L_1(\mathbb{R})$ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ (global) Lipschitzstetig auf \mathbb{R} . Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|(W_\psi f)(b, a)| \leq C |a|^{\frac{3}{2}}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Beweis: Eine auf \mathbb{R} Lipschitzstetige Funktion f aus $L_2(\mathbb{R})$ ist beschränkt. Die Aussage folgt deshalb aus (dem Beweis von) Satz 3.23, da die dortige Konstante \hat{L} nicht mehr von b abhängt und $\alpha = 1$ ist. \square

Ein Abklingverhalten von $W_\psi f$ für $a \rightarrow 0$ mit höherer Ordnung ist i.a. nicht mehr zu erwarten. Dafür müssen weitere Eigenschaften des Wavelets ψ (außer $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$) gefordert werden.

Definition 3.25 *Man sagt, ein Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ hat die Ordnung $N \in \mathbb{N}$, falls $t^N \psi \in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0$, $k = 0, \dots, N-1$, und $0 \neq \int_{-\infty}^{\infty} t^N \psi(t) dt$.*

Klar ist, dass jedes Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ mit $t\psi \in L_1(\mathbb{R})$ die Ordnung $N \geq 1$ hat. Für das Haar-Wavelet ψ_H gilt wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \psi_H(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = -\frac{1}{4} \neq 0, \quad \text{dass } N = 1 \text{ ist.}$$

Weitere Eigenschaften von Wavelets höherer Ordnung sind die Folgenden:

Folgerung 3.26 *Ist $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet der Ordnung $N \in \mathbb{N}$, so ist $\hat{\psi}$ N -mal stetig differenzierbar und es gilt $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, und $\hat{\psi}^{(N)}(0) \neq 0$.*

Beweis: Der erste Teil der Aussage und die Formel

$$\hat{\psi}^{(k)}(\omega) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) t^k \psi(t) dt \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, N)$$

folgt aus Satz 3.3c). Daraus ergibt sich

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

und die Aussage wegen Definition 3.25. \square

Satz 3.27 *Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ und es gelte $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap C^r(\mathbb{R})$ für $0 \leq r < N$ mit $f^{(r)}$ Lipschitzstetig auf \mathbb{R} . Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|(W_\psi f)(b, a)| \leq C|a|^{r+\frac{3}{2}}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

(Für $N = 1$ und $r = 0$ ergibt sich speziell Folgerung 3.24.)

Beweis: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, beliebig gewählt. Nach dem Taylorschen Satz existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein $\tau \in \{\lambda t + (1 - \lambda)b : \lambda \in [0, 1]\}$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (t-b)^k + \frac{f^{(r)}(\tau)}{r!} (t-b)^r \\ &= \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (t-b)^k + \frac{1}{r!} (f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b)) (t-b)^r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (W_\psi f)(b, a) &= (C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= (C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^k \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} (f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b)) (t-b)^r \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right\} \\ (3.24!) &= \frac{(C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}}}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} (f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b)) (t-b)^r \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ \rightsquigarrow |(W_\psi f)(b, a)| &\leq \frac{(C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}}}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b)| |t-b|^r |\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)| dt \\ &\leq \frac{(C_\psi |a|)^{-\frac{1}{2}}}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} L |t-b|^{r+1} |\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)| dt, \end{aligned}$$

wobei L die Lipschitzkonstante von $f^{(r)}$ bezeichnet und $|\tau - b| \leq |t - b|$ verwendet wurde. Mit der Substitution $t = b + as$ folgt dann

$$|(W_\psi f)(b, a)| \leq \frac{L}{r! \sqrt{C_\psi}} |a|^{r+\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{r+1} |\psi(s)| ds,$$

wobei das Integral wegen $r + 1 \leq N$ und unserer Voraussetzung über ψ endlich ist. \square

Es lohnt sich also, die Ordnung des Wavelets ψ möglichst hoch anzusetzen und nach geeigneteren Mutter-Wavelets als ψ_H zu suchen.

3.4 Orthogonale Wavelets und Multiskalen-Analyse

Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ und wir betrachten die Familie $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$, wobei

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Wir interessieren uns nun dafür, unter welchen Bedingungen diese Familie eine Basis, insbesondere eine orthonormierte Basis, in $L_2(\mathbb{R})$ darstellt.

Definition 3.28 Eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ heißt R-Funktion, falls die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\text{span}\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ist dicht in $L_2(\mathbb{R})$;
- (ii) es existieren Konstanten $0 < A \leq B < \infty$, so dass

$$A \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2^2 \leq B \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2$$

für alle Folgen $(c_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ in \mathbb{C} mit $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2 < \infty$.

Die Familie $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ heißt dann auch Riesz-Basis und A bzw. B heißen Riesz-Konstanten.

Satz 3.29 Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine R-Funktion mit den zugehörigen Konstanten $A \leq B$. Dann ist ψ ein Wavelet und es gilt

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

(Man nennt ψ deshalb auch dyadisches Wavelet.)

Beweis: In Chui, Theorem 3.21 wird gezeigt, dass für eine R-Funktion ψ mit Riesz-Konstanten $A \leq B$ die behauptete Ungleichung für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ eine notwendige Bedingung ist. Wir zeigen jetzt, dass daraus folgt, dass ψ die Zulässigkeitsbedingung in Def. 3.14 erfüllt. Zunächst ist klar, dass gilt

$$\frac{C_\psi}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega.$$

Für den ersten Term in der letzteren Summe gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \quad (\text{Subst.: } \omega = 2^{-j}u) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_1^2 \frac{|\hat{\psi}(2^{-j}u)|^2}{u} du = \int_1^2 \frac{1}{u} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}u)|^2 du. \end{aligned}$$

Dabei ist die Vertauschung von Integral und Reihen-Limes wegen der Konvergenz der Reihe fast überall und der Beschränktheit fast überall möglich. Aus der Ungleichung folgt dann aber

$$A \log 2 = A \int_1^2 \frac{1}{u} du \leq \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \int_1^2 \frac{1}{u} du = B \log 2.$$

Analog erhält man dieselbe Ungleichung für $\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega$ mit der entsprechenden Substitution $-\omega = 2^{-j}u$ und der Abschätzung

$$A \int_{-2}^{-1} \frac{1}{-u} du \leq \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \int_{-2}^{-1} \frac{1}{-u} du.$$

Deshalb folgt $\frac{A}{\pi} \log 2 \leq C_\psi = \int_{-\infty}^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq \frac{B}{\pi} \log 2$. □

Satz 3.29 liefert also zunächst ein notwendiges Kriterium an das Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ damit $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis in $L_2(\mathbb{R})$ wird.

Definition 3.30 *Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine R-Funktion.*

a) ψ heißt R-Wavelet, falls eine Funktion $\tilde{\psi} \in L_2(\mathbb{R})$ existiert, so dass

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j\ell} \delta_{km}, \quad \forall j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}.$$

(Hierbei ist $\tilde{\psi}_{\ell,m}$ analog zu $\psi_{j,k}$, aber ausgehend von $\tilde{\psi}$ definiert.)

b) ψ heißt orthogonales Wavelet, falls die folgende Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \delta_{j\ell} \delta_{km}, \quad \forall j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}.$$

Folgerung 3.31

a) Jedes orthogonale Wavelet ψ ist ein R-Wavelet mit den Riesz-Konstanten $A = B = 1$, mit $C_\psi = \frac{1}{\pi} \log 2$ und der Eigenschaft

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

b) Für jedes R-Wavelet ψ ist auch die zugehörige Funktion $\tilde{\psi}$ (gemäß Def. 3.30 ein R-Wavelet, und es gilt für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$):

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}.$$

(Jede dieser Reihen heißt Wavelet-Reihe und $(\psi, \tilde{\psi})$ heißt Wavelet-Paar.)

Beweis:

- a) Nach Definition ist ein orthogonales Wavelet ein R -Wavelet mit $\tilde{\psi} := \psi$. Wegen 3.28(i) gilt für die Wavelet-Reihe die Parseval'sche Gleichung

$$\|f\|^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}),$$

sowie die Gleichung

$$\left\| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi_{j,k} \right\|_2^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2, \quad \forall \{c_{jk}\} \subset \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2 < \infty.$$

Also gilt $A = B = 1$ und der Rest der Aussage folgt aus Satz 3.29.

- b) Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein R -Wavelet mit dem Wavelet-Paar $(\psi, \tilde{\psi})$. Dann bedeuten die Bedingungen (i) und (ii) in Definition 3.28, dass $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis in $L_2(\mathbb{R})$ ist. D.h. für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{jk} \in \mathbb{C}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi_{j,k},$$

wobei die Reihe in $L_2(\mathbb{R})$ konvergiert. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \langle f, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \delta_{j\ell} \delta_{km} = c_{\ell m} \quad \text{für alle } \ell, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \text{und} \quad \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2 < \infty.$$

Wäre nun $\text{span} \{\tilde{\psi}_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ nicht dicht in $L_2(\mathbb{R})$, so würde ein $g \in L_2(\mathbb{R})$ mit $g \perp \text{span} \{\tilde{\psi}_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ und $g \neq 0$ existieren. Dies ist aber unmöglich, da aus $\langle g, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle = 0, \forall j, k \in \mathbb{Z}$, und aus der obigen Reihendarstellung $g = 0$ folgt.

Um zu zeigen, dass auch $\tilde{\psi}$ ein R -Wavelet ist, genügt es, dass $\tilde{\psi}$ die Bedingung (ii) von Definition 3.28 erfüllt. Die Orthogonalitätsbedingung selbst ist ja eine symmetrische Eigenschaft für das Wavelet-Paar $(\psi, \tilde{\psi})$.

Es bezeichne $\gamma_{\ell m; jk} = \langle \psi_{\ell m}, \psi_{jk} \rangle$ und wir betrachten die unendliche Matrix $M = (\gamma_{\ell m; jk})_{\ell, m, j, k \in \mathbb{Z}}$. Da ψ eine R -Funktion ist, gilt

$$A \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2 \leq \sum_{j,k,\ell,m \in \mathbb{Z}} c_{\ell m} \bar{c}_{jk} \gamma_{\ell m; jk} \leq B \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2$$

für alle Folgen (c_{jk}) in \mathbb{C} mit $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2 < \infty$. Folglich ist M als lineare Abbildung definiert auf dem Raum ℓ_2 dieser Folgen und abbildend in ℓ_2 beschränkt und

positiv definit. Die inverse Abbildung M^{-1} mit den Elementen $\mu_{\ell m; jk}$, $\ell, m, j, k \in \mathbb{Z}$, existiert dann und es gilt

$$\frac{1}{B} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2 \leq \sum_{j,k,\ell,m \in \mathbb{Z}} c_{\ell m} \bar{c}_{jk} \mu_{\ell m; jk} \leq \frac{1}{A} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2.$$

Die Matrizen M und M^{-1} entsprechen aber den Basis-Transformationen

$$\psi_{\ell m} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \gamma_{\ell m; jk} \tilde{\psi}_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\psi}_{\ell m} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \mu_{\ell m; jk} \psi_{jk} \quad (\ell, m \in \mathbb{Z}),$$

d.h. es gilt $\mu_{\ell m; jk} = \langle \tilde{\psi}_{\ell m}, \tilde{\psi}_{jk} \rangle$, $j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist $\tilde{\psi}$ eine R -Funktion und damit ein R -Wavelet. Analog zum obigen ersten Beweisteil folgt nun auch für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}.$$

□

Wir kommen nun zur angekündigten Dekomposition von $L_2(\mathbb{R})$. Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine R -Funktion, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ die zugehörige Basis, und wir betrachten die Teilräume von $L_2(\mathbb{R})$:

$$W_j := \text{cl span} \{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \\ V_{j-1} := V_j \dot{+} W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Dabei bedeutet $\dot{+}$ das Zeichen für die direkte Summe.

(Sind L und \tilde{L} lineare Teilräume von $L_2(\mathbb{R})$, so ist jedes Element f aus $L \dot{+} \tilde{L}$ eindeutig darstellbar in der Form $f = g + \tilde{g}$ mit $g \in L$ und $\tilde{g} \in \tilde{L}$.)

Satz 3.32 *Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein R -Wavelet. Dann gilt für die oben definierten Teilräume $W_j, V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$, von $L_2(\mathbb{R})$:*

$$(0) \quad L_2(\mathbb{R}) = \dot{+}_{j \in \mathbb{Z}} W_j,$$

$$(1) \quad V_j \subseteq V_{j-1} \subseteq L_2(\mathbb{R}), \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$(2) \quad \text{cl} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right) = L_2(\mathbb{R}),$$

$$(3) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

$$(4) \quad f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ist $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein orthogonales Wavelet, so gilt sogar

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad \text{und} \quad V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

wobei \oplus das Zeichen für die orthogonale Summe ist.

Beweis: (0) folgt aus der Wavelet-Reihendarstellung jedes Elements aus $L_2(\mathbb{R})$ (gemäß Folgerung 3.31b)). (1) ist klar nach Definition und (2) folgt aus der Tatsache, dass ψ eine R -Funktion ist. Nach Konstruktion gilt für jedes $f \in V_j$ die Reihendarstellung

$$f = \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{i,k} \rangle \psi_{i,k} \quad (\text{analog zum Beweis in 3.31b)).$$

Gilt nun $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, so folgt aus der Gültigkeit dieser Reihendarstellung für jedes $j \in \mathbb{Z}$,

dass $\langle f, \tilde{\psi}_{i,k} \rangle = 0, \forall j, k \in \mathbb{Z}$. Wegen der Dichtheit von $\text{span} \{\tilde{\psi}_{i,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ folgt daraus $f = 0$, also (3). Wegen $\psi_{i,k}(2^{-i} \cdot) \in W_{j+1}$ und $\psi_{i,k}(2 \cdot) \in W_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$, folgt sofort (4).

Ist ψ orthogonal, so gilt $\langle g_j, g_\ell \rangle = 0$, falls $j \neq \ell, g_j \in W_j$ und $g_\ell \in W_\ell$. Damit wird "⊥" zu "⊕" in (0) und in der Definition der Räume $V_j, j \in \mathbb{Z}$. \square

Ausgehend von einem Wavelet-Paar haben wir die Teilräume $V_j, j \in \mathbb{Z}$, mit den Eigenschaften (1)–(4) konstruiert. Wir gehen jetzt den umgekehrten Weg, starten mit den Bedingungen (1)–(4) und versuchen das Wavelet-Paar zu konstruieren. Dies gelingt uns aber nur für orthogonale Wavelets.

Definition 3.33 *Eine Folge $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ von (abgeschlossenen) Teilräumen von $L_2(\mathbb{R})$ heißt Multiskalen-Analyse (MSA) von $L_2(\mathbb{R})$, falls sie die Eigenschaften (1)–(4) in Satz 3.32 besitzt. Eine Funktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ heißt Skalierungsfunktion einer MSA, falls $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von V_0 ist.*

Folgerung 3.34 *Ist $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse von $L_2(\mathbb{R})$ und Φ eine Skalierungsfunktion derselben, so ist das System $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ mit*

$$\Phi_{j,k}(t) := 2^{-\frac{j}{2}} \Phi(2^{-j}t - k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

für jedes $j \in \mathbb{Z}$ eine orthonormierte Basis von V_j .

Die orthogonale Projektion P_j von $L_2(\mathbb{R})$ auf V_j hat die Gestalt

$$P_j f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \Phi_{j,k}, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

und es gilt $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\|_2 = 0$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Beweis: Aus (4) folgt zunächst $\Phi_{j,k} \in V_j, \forall k, j \in \mathbb{Z}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j,k}, \Phi_{j,\ell} \rangle &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(2^{-j}t - k) \overline{\Phi(2^{-j}t - \ell)} dt \quad (\text{Subst.: } u = 2^{-j}t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u - k) \overline{\Phi(u - \ell)} du = \delta_{k\ell}, \end{aligned}$$

da Φ eine Skalierungsfunktion ist. Also ist $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ für jedes $j \in \mathbb{Z}$ orthonormiert. Das Orthonormalsystem ist auch vollständig, da aus $f \in V_j$ und $\langle f, \Phi_{j,k} \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, folgt

$$\langle f(2^j \cdot), \Phi(\cdot - k) \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

und deshalb $f(2^j \cdot) = 0$ gilt, da Φ eine Skalierungsfunktion ist. Also gilt für jedes $f \in V_j$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \Phi_{j,k} \\ \rightsquigarrow P_j f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle P_j f, \Phi_{j,k} \rangle \Phi_{j,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \Phi_{j,k}, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen folgen dann aus den Eigenschaften (2) und (3). \square

Bemerkung 3.35 Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse von $L_2(\mathbb{R})$ mit Skalierungsfunktion Φ . Dann kennen wir nach Folgerung 3.34 orthonormierte Basen aller Teilräume V_j , $j \in \mathbb{Z}$. Die Projektion P_j kann man wie folgt interpretieren: Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ enthält das Bild $P_j f$ noch alle Details von f , die wenigstens die Ausdehnung 2^j auf der reellen Achse besitzen.

Wir benötigen sowohl für die Berechnung von Skalierungsfunktionen als auch später im Kapitel ein Kriterium, wann für eine gegebene Funktion $g \in L_2(\mathbb{R})$ ein System der Form $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ darstellt.

Lemma 3.36 Für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ bildet das System $\{f(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ gdw. die Gleichung

$$F(\omega) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ gültig ist.

Beweis: Wir setzen $f_k(x) := f(x - k)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, und erhalten

$$\begin{aligned} \langle f_k, f_j \rangle &= \langle \hat{f}_k, \hat{f}_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_k(\omega) \overline{\hat{f}_j(\omega)} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-ik\omega) \hat{f}(\omega) \overline{\exp(-ij\omega) \hat{f}(\omega)} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-i(k-j)\omega) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi\ell}^{2\pi(\ell+1)} \exp(-i(k-j)\omega) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \exp(-i(k-j)(u + 2\pi\ell)) |\hat{f}(u + 2\pi\ell)|^2 du \\ &= \int_0^{2\pi} \exp(-i(k-j)u) F(u) du, \quad \forall k, j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Das letztere Integral ist bis auf den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{2\pi}$ ein Fourierkoeffizient der 2π -periodischen Funktion F . Gilt also $\langle f_k, f_j \rangle = \delta_{kj}$, so auch

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u) \exp(-i(k-j)u) du = \frac{1}{2\pi} \delta_{kj}$$

und umgekehrt. Diese Fourierkoeffizienten hat aber gerade die Funktion

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

\square

Satz 3.37 Jede Skalierungsfunktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ einer MSA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ genügt einer sog. Skalierungsgleichung, d.h., es existiert eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{C})$ mit

$$\Phi = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(2 \cdot -k)$$

und die Fourier-Transformierte $\hat{\Phi}$ von Φ genügt der Funktionalgleichung

$$\hat{\Phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{wobei} \quad H(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik \cdot)$$

die sog. erzeugende Funktion der MSA ist. Für die erzeugende Funktion $H(\cdot)$ gilt:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Nach Folgerung 3.34 ist $\{\Phi(2 \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von V_{-1} . Wegen $\Phi \in V_0 \subseteq V_{-1}$ muß gelten

$$\Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \Phi, \Phi(2 \cdot -k) \rangle \Phi(2 \cdot -k) \quad (\text{in } L_2(\mathbb{R})).$$

Mit $h_k := \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Phi, \Phi(2 \cdot -k) \rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, folgt daraus die Skalierungsgleichung.

Überdies folgt aus der Parseval'schen Gleichung, daß

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \Phi, \Phi(2 \cdot -k) \rangle|^2 = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty, \quad \text{d.h. } (h_k) \in \ell_2(\mathbb{C}).$$

Mit der Fourier-Transformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\omega) &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n h_k \mathcal{F}(\Phi(2 \cdot -k))(\omega) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp\left(-\frac{ik\omega}{2}\right) (\mathcal{F}\Phi)\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$, da trigonometrische Fourierreihen fast überall konvergieren (Blatter, Aussage (2.4)). Da $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem bildet, muß nach Lemma 3.36 gelten:

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}(\omega + 2\pi\ell) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Teilt man in der letzten Reihe die Summanden mit geraden und ungeraden ℓ auf, so entsteht mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}(\omega + 2\pi \cdot 2\ell) \right|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}(\omega + 2\pi(2\ell + 1)) \right|^2 \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}(\omega + 4\pi\ell) \right|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}(\omega + 2\pi + 4\pi\ell) \right|^2 \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \right|^2 \left| \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \right|^2 \left| \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \right|^2 \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \right|^2 \right) \\ &= \left(\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right) \frac{1}{2\pi} \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.38 Die Skalierungsfunktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ einer Multiskalen-Analyse besitze einen kompakten Träger. Dann sind

$$a := \inf\{x \in \mathbb{R} : \Phi(x) \neq 0\} \quad \text{und} \quad b := \sup\{x \in \mathbb{R} : \Phi(x) \neq 0\}$$

ganze Zahlen und es sind höchstens die h_k mit $a \leq k \leq b$ in der Skalierungsgleichung von 0 verschieden.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnung $\Phi_{-1,k} := \sqrt{2}\Phi(2 \cdot -k)$ (entsprechend 3.34) und schlussfolgern aus Satz 3.37

$$\Phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \Phi_{-1,k},$$

sowie

$$\begin{aligned} \inf\{x \in \mathbb{R} : \Phi_{-1,k} \neq 0\} &= \frac{1}{2}(a + k) \quad \text{und} \\ \sup\{x \in \mathbb{R} : \Phi_{-1,k} \neq 0\} &= \frac{1}{2}(b + k). \end{aligned}$$

Wegen $h_k = \langle \Phi, \Phi_{-1,k} \rangle$ ist h_k höchstens dann verschieden von 0, wenn die Träger von Φ und $\Phi_{-1,k}$ sich überlappen. Dies kann nur auf endlich viele h_k zutreffen, also existieren Zahlen

$$-\infty < k_{min} := \min\{k : h_k \neq 0\} \leq k_{max} = \max\{k : h_k \neq 0\}.$$

Aus der Skalierungsgleichung folgt ferner (vgl. Blatter, Aussage 5.7)

$$a := \inf\{x \in \mathbb{R} : \Phi_{-1,k_{min}}(x) \neq 0\} \quad \text{und} \quad b := \sup\{x \in \mathbb{R} : \Phi_{-1,k_{max}}(x) \neq 0\}$$

und damit $a = \frac{1}{2}(a + k_{min})$ und $b = \frac{1}{2}(b + k_{max})$, woraus die Aussage folgt. \square

Bemerkung 3.39 Die Skalierungsgleichung für Φ und damit die Folge $(h_k) \in \ell_2(\mathbb{C})$ bestimmt die gesamte Multiskalen-Analyse. Die Folge (h_k) wird auch in den später zu besprechenden Algorithmen die entscheidende Rolle spielen. Hat Φ kompakten Träger, eine Eigenschaft auf die wir achten werden, so sind dies sogar nur endlich viele Zahlen.

Wegen der Eigenschaft (1) lassen sich die $\Phi_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, sicher nicht zu einer großen orthonormierten Basis von $L_2(\mathbb{R})$ zusammenfassen, Darum konstruiert man ein System von Räumen $\{W_j : j \in \mathbb{Z}\}$ wie folgt:

Satz 3.40 Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine MSA von $L_2(\mathbb{R})$. Wir definieren Räume W_j so, daß $V_j \perp W_j$ und $V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $W_i \perp W_j, i \neq j$, und $L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.

Beweis: Blatter, Aussage 5.1. \square

Folgerung 3.41 Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine MSA von $L_2(\mathbb{R})$ und die Räume $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ seien wie in Satz 4.10 definiert. Ist $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ so gewählt, daß $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_0 ist, so ist ψ ein orthogonales Wavelet und erzeugt die MSA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Beweis: Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ läßt sich $v \in V_{j-1}$ eindeutig in der Form

$$v(\cdot) = u(\cdot) + w(\cdot), u \in V_j, w \in W_j, u \perp w,$$

darstellen. Deshalb und wegen (4) gilt auch

$$(*) \quad v(2\cdot) = u(2\cdot) + w(2\cdot), v(2\cdot) \in V_{j-2}, u(2\cdot) \in V_{j-1}.$$

Da überdies $\langle u(2\cdot), w(2\cdot) \rangle = \frac{1}{2} \langle u, w \rangle = 0$ gilt, ist (*) gerade die orthogonale Zerlegung von $v(2\cdot)$. Es folgt, daß

$$w(2\cdot) \in W_{j-1}.$$

Die umgekehrte Richtung gilt analog und wir haben

$$w(\cdot) \in W_j \Leftrightarrow w(2\cdot) \in W_{j-1}.$$

Deshalb gilt für die üblicherweise konstruierten Funktionen

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k), \forall j, k \in \mathbb{Z},$$

daß $\psi_{j,k} \in W_j, \forall j, k \in \mathbb{Z}$. Analog zu Folgerung 3.34 folgt, daß $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_j ist. Da nach Satz 3.40 aber die Räume $W_j, j \in \mathbb{Z}$, orthogonal sind und $L_2(\mathbb{R}) = \text{cl} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ gilt, ist das gesamte System $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$. D.h. ψ ist ein orthogonales Wavelet. \square

Würde es nun gelingen, eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ zu finden, so dass $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_0 ist, so wäre ψ unser orthogonales Wavelet. Dazu ist zunächst eine Charakterisierung von W_0 erforderlich.

Lemma 3.42 *Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ gehört zu W_0 gdw. eine 2π -periodische Funktion $\nu \in L_2[0, 2\pi]$ existiert, so daß*

$$\hat{f}(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right) \nu(\omega) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{fast überall in } \mathbb{R}.$$

Beweis: Blatter, Aussage 5.11. \square

Satz 3.43 *Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse mit Skalierungsfunktion Φ und erzeugender Funktion H . Wird dann das Wavelet ψ definiert durch*

$$\hat{\psi}(\omega) := \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

$$\text{bzw.} \quad \psi(t) := \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \Phi(2t - k), \quad t \in \mathbb{R},$$

so ist ψ ein orthogonales Wavelet, d.h., das zugehörige Funktionensystem $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine orthonormierte Basis von $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis: Nach Folgerung 3.41 genügt es zu zeigen, dass das System $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_0 darstellt. Nach Lemma 3.42 gehören die Funktionen $\psi(\cdot - k)$ sämtlich zu W_0 . Um zu zeigen, daß $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormiert ist, verwenden wir Lemma 3.36. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi\ell)|^2 &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 4\pi\ell)|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi + 4\pi\ell)|^2 \\ &= |H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \right|^2 \\ &\quad + |H\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \right|^2 \\ &= \left(|H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)|^2 + |H\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 \right) \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \quad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

Dabei wurde Satz 3.37 und Lemma 3.36 mit $f = \Phi$ verwendet. Als nächstes zeigen wir, dass $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ den Raum W_0 aufspannt. Es sei $f \in W_0$ beliebig. Nach Lemma 3.42 existiert eine 2π -periodische Funktion $\nu \in L_2[0, 2\pi]$, so dass

$$\hat{f}(\omega) = \nu(\omega) \hat{\psi}(\omega) \quad \text{f.ü.}$$

Es sei $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \exp(-ik\omega)$ die Fourierreihe von ν . Damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \exp(-ik\omega) \hat{\psi}(\omega) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \hat{\psi}_{0,k}(\omega) \quad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

Also haben wir $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \psi(\cdot - k)$, d.h., das gewünschte Resultat.

Schließlich bleibt die Gestalt von $\psi(\cdot)$ herzuleiten. Es gilt

$$\begin{aligned} \exp(i\frac{\omega}{2}) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \exp(ik\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)) \exp(i\frac{\omega}{2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{h}_k \exp(i(k+1)\frac{\omega}{2}) \quad (\ell := -k-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^{\ell-1} \overline{h_{-\ell-1}} \exp(-i\ell\frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

und damit für $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \frac{1}{2} \exp\left(-ik\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{f.ü.}$$

Dies ist aber die Fourier-Transformierte der Funktion

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \Phi(2t - k) \quad \text{f.ü.}$$

□

Beispiel 3.44 (Haar-Wavelet, Haar-MSA)

Wir betrachten wie in Beispiel 3.18a) die Funktion $\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

sowie zunächst $\psi_{j,k}(x) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi_H(2^{-j}x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = 2^{-\frac{j+\ell}{2}} \left\{ \int_{k2^j}^{(k+\frac{1}{2})2^j} \psi_H(2^{-\ell}x - m)dx - \int_{(k+\frac{1}{2})2^j}^{(k+1)2^j} \psi_H(2^{-\ell}x - m)dx \right\}.$$

1. Fall: $j = \ell$: $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,m} \rangle = 0$ für $k \neq m$, da für die Träger der Funktionen gilt: $\text{supp } \psi_{j,k} \cap \text{supp } \psi_{j,m} = [k2^j, (k+1)2^j) \cap [m2^j, (m+1)2^j) = \emptyset$.
2. Fall: $j < \ell$: $\psi_H(2^{-\ell} \cdot -m)$ ist dann auf dem Träger $[k2^j, (k+1)2^j)$ von $\psi_{j,k}$ konstant (gleich 1,0 oder -1) und deshalb folgt $\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = 0$ (Differenz zweier Integrale mit gleichem konstanten Integranden und gleicher Intervalllänge).

Also ist das System $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormiert . Die Vollständigkeit des Systems sieht man wie folgt ein: Die lineare Hülle dieses Systems enthält alle stückweise konstanten Funktionen auf \mathbb{R} . Diese sind aber dicht in $L_2(\mathbb{R})$ (da dies für Funktionen auf beschränkten Intervallen klar ist und Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ durch solche, die quadratisch integrierbar sind und einen beschränkten Träger haben, approximierbar sind).

Damit erzeugt ψ_H im Sinne von Satz 3.32 eine Multiskalen-Analyse $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit $P_j f = \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{i,k} \rangle \psi_{i,k}$, $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$, wobei P_j der orthogonale Projektor auf V_j ist. Deshalb ergibt sich für

$$\begin{aligned} V_0 &= \text{cl span } \{\psi_H(2^{-i} \cdot -k) : i \geq 1, i, j \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f \text{ ist konstant auf } [k, k+1) \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Folglich ist $\Phi = \chi_{[0,1)}$ (charakteristische Funktion von $[0,1)$) eine Skalierungsfunktion, da das System $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormiert und vollständig ist.

Wegen $\chi_{[0,1)} = \chi_{[0,\frac{1}{2})} + \chi_{[\frac{1}{2},1)}$ gilt $\Phi = \Phi(2 \cdot) + \Phi(2 \cdot - 1)$. Letzteres ist die Skalierungsgleichung und wir lesen ab, dass

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad h_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\},$$

gilt. Die erzeugende Funktion hat die Gestalt $H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + \exp(-i\omega))$ und es gilt

$$\hat{\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) \chi_{[0,1)}(x) dx = \int_0^1 \exp(-i\omega x) dx = \frac{1}{i\omega}(1 - \exp(-i\omega)).$$

Nun lässt sich Satz 3.43 anwenden und man kann für das daraus resultierende Wavelet ψ dessen Fourier-Transformierte $\hat{\psi}$ bzw. sogar ψ als

$$\psi(t) = \sum_{k=-2}^{-1} (-1)^{k-1} \Phi(2t - k) = \Phi(2t + 1) - \Phi(2t + 2), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

berechnen. Es gilt

$$\psi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & , \quad t \in [-1, -\frac{1}{2}) \\ 1 & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 0) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{array} \right\} = -\psi_H(t+1),$$

d.h. die Formeln liefern nicht das traditionelle Haar-Wavelet zurück, sondern ein etwas modifiziertes (aber geeignetes) orthogonales Wavelet.

Bemerkung 3.45 Satz 3.37 wirft nun die allgemeine Frage auf, ob und unter welchen Voraussetzungen eine Funktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ Skalierungsfunktion einer Multiskalen-Analyse sein kann, und wie solche Funktionen konstruiert werden können. Die Skalierungsgleichung für Φ würde uns dann über Satz 3.43 den Weg zu einem orthogonalen Wavelet weisen.

Satz 3.46 *Ist $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es existiere eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|\Phi(t)| \leq C(1+t^2)^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = 1$ bzw. $\hat{\Phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;

(iii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\Phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \equiv \frac{1}{2\pi}$ f.ü.;

(iv) *es existiert eine Folge $(h_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft*

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \Phi(2t - k), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Dann ist Φ Skalierungsfunktion der Multiskalen-Analyse $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, wobei V_j wie in Folgerung 3.34 von den Basen $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ erzeugt wird.

Beweisskizze: Aus (iii) folgt mit Lemma 3.36, dass $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormiert ist, wie in Folgerung 3.34 folgt, dass $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormiert ist.

Wir definieren

$$V_j := \text{cl span } \{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Aus (iv) folgt $V_0 \subseteq V_{-1}$ und allgemeiner $V_j \subseteq V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$, also ist die Bedingung (1) für eine MSA erfüllt. Dann folgt aus (i) die Bedingung (3) und aus (ii) die Bedingung (2) (vgl. Blatter, Aussage 5.8). Bedingung (4) ist durch die gesamte Konstruktion erfüllt. \square

Beispiel 3.47 (Meyer-Wavelet)

$$\text{Ansatz: } \hat{\Phi}(\omega) := \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right) & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0 & , \quad |\omega| \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{wobei } \nu(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 & , \quad x \in [0, 1] \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Man kann zeigen, dass die zugehörige Funktion Φ die Voraussetzungen von Satz 3.46 erfüllt. Aus der Konstruktion von Satz 3.43 ergibt sich dann das sogenannte Meyer-Wavelet ψ . (Φ und ψ besitzen keinen kompakten Träger; Blatter, S. 125-127.)

Wir kommen nun zur Konstruktion von Wavelets mit beschränktem Träger. Dazu suchen wir eine Funktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$, die einen beschränkten Träger hat und die Eigenschaften (ii)–(iv) von Satz 3.46 erfüllt. Wir stellen zunächst fest, daß gemäß Folgerung 3.38 nur endlich viele h_k verschieden von 0 sein können und deshalb die erzeugende Funktion H ein trigonometrisches Polynom ist, d.h. die Form

$$H(\omega) = P(\exp(-i\omega)), \quad P(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} h_k y^k,$$

besitzt. Überdies erfüllt $H(\cdot)$ nach Satz 3.37 und (iv) die Bedingungen:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \equiv 1, \quad H(0) = 1, \quad H(\pi) = 0.$$

Annahme: $k_{\min} = 0$, $k_{\max} = 2N - 1$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $P(\cdot)$ ist ein reelles Polynom vom Grad $2N - 1$.

Damit ψ ein Wavelet der Ordnung N ist, muss nach Folgerung 3.26 $\hat{\psi}$ N -mal stetig differenzierbar sein und es gilt für $k = 1, \dots, N$:

$$\hat{\psi}^{(k)}(\omega) = (-i)^k \hat{\psi}_k(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}), \quad \text{wobei } \psi_k(x) := x^k \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Also gilt: $\hat{\psi}^{(k)}(0) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx$ und deshalb $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ für $k = 0, \dots, N - 1$ und $\hat{\psi}^{(N)}(0) \neq 0$.

Geht man nun aus von dem in Satz 3.43 verwendeten Ansatz

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

aus, so sollte also $\hat{\psi}$ eine Nullstelle N -ter Ordnung in $\omega = 0$, d.h. H eine Nullstelle N -ter Ordnung in $\omega = \pi$, besitzen.

Dies führt zu folgendem Ansatz für die erzeugende Funktion $H(\cdot)$:

$$H_N(\omega) := \left(\frac{1 + \exp(-i\omega)}{2}\right)^N B_N(\exp(-i\omega))$$

wobei B_N ein Polynom vom Grad $N - 1$ mit $B_N(-1) \neq 0$ ist.

Satz 3.48 (Daubechies-Wavelets)

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und wir betrachten die obige Funktion H_N , wobei B_N so bestimmt ist, dass

$$B_N(\exp(i\omega))B_N(\exp(-i\omega)) = P_N\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

wobei

$$P_N(y) := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Dann erzeugt die zugehörige Skalierungsfunktion Φ_N eine Multiskalen-Analyse und das Wavelet

$$\psi_N(\cdot) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k \overline{h_{2N-1-k}} \Phi_N(2 \cdot -k)$$

ist orthogonal und besitzt Ordnung N .

Beweis: Blatter (Kap. 6.2), Daubechies (Chapter 6).

Bei Anwendung von Satz 3.43 wurden die Koeffizienten so unnumeriert, daß die Summation wie bei Φ über $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ läuft. \square

Beispiel 3.49

$N=1$: $H_1(\omega) = \frac{1}{2}(1 + \exp(-i\omega))$, $\Phi_1(\cdot) = \chi_{[0,1)}(\cdot)$, $\psi_1 = \psi_H$.

Im Unterschied zu Beispiel 3.44 führen die unnumerierten Koeffizienten zu

$$\psi_1 = \Phi_1(2 \cdot) - \Phi_1(2 \cdot - 1).$$

$N=2$: $H_2(\omega) = \left(\frac{1+\exp(-i\omega)}{2}\right)^2 B_2(\exp(-i\omega))$, wobei $B_2(y) = b_0 + b_1 y$,

$B_2(\exp(i\omega))B_2(\exp(-i\omega)) = P_2\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$ mit $P_2(y) = 1 + 2y$.

Folglich muß gelten:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (b_0 + b_1 \exp(i\omega))(b_0 + b_1 \exp(-i\omega)) &= 1 + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} = 2 - \cos \omega \\ &= 2 - \frac{1}{2}(\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\rightsquigarrow b_0^2 + b_1^2 = 1, \quad b_0 b_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow b_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad b_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightsquigarrow h_{0/3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}, \quad h_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$$

Man kann zeigen: Φ_2 ist stetig (vgl. Blatter, Kap 6.3).

$N=3,5,7,9$: vgl. Blatter, Kap 6.2 oder Daubechies, Kap. 6.4 bzw. die nachfolgende Abbildung aus Daubechies, p. 197, die die Gestalt der Skalierungsfunktionen und Wavelets veranschaulicht.

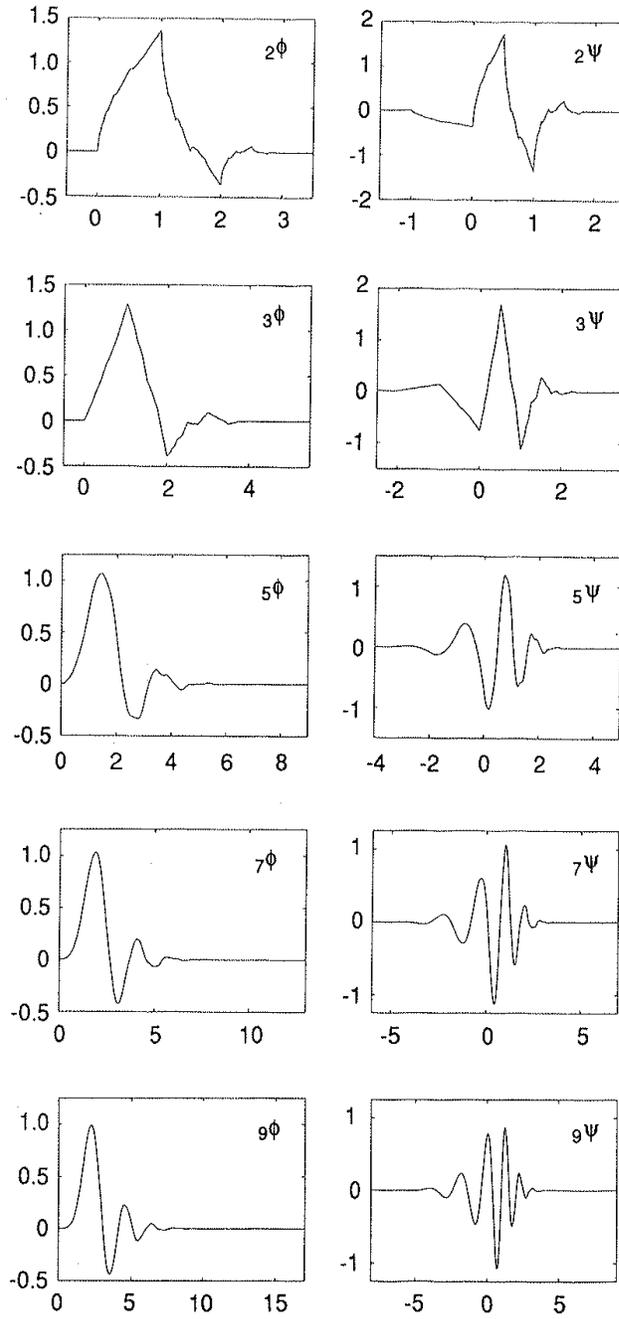


FIG. 6.3. Plots of the scaling functions $N\phi$ and wavelets $N\psi$ for the compactly supported wavelets with maximum number of vanishing moments for their support width, and with the extremal phase choice, for $N = 2, 3, 5, 7$, and 9 .

Bemerkung 3.50 (*Wavelet-Algorithmen*)

Wir verwenden im Folgenden die Skalierungsgleichung für Φ (einer MSA) und die analoge Gleichung für das orthogonale Wavelet (vgl. 3.37, 3.43):

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \Phi(2t - k) \quad \text{und} \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \Phi(2t - k).$$

Daraus folgt für die Systeme $\{\Phi_{j,n} : j, n \in \mathbb{Z}\}$ und $\{\psi_{j,n} : j, n \in \mathbb{Z}\}$:

$$\Phi_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \Phi_{j-1,2n+k} \quad \text{und} \quad \psi_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \Phi_{j-1,2n+k} \quad \forall j, n \in \mathbb{Z}.$$

Es sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ zu analysieren und zu rekonstruieren. Dabei bedeutet Analyse den Übergang von 'feiner' zu 'größerer' Information (d.h. von $j-1$ zu j) und Rekonstruktion umgekehrt von j zu $j-1$.

Analyse: Es sei $P_{j-1}f = \sum_k a_{j-1,k} \Phi_{j-1,k}$, $a_{j-1,k} = \langle f, \Phi_{j-1,k} \rangle$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{j,\ell} &= \langle f, \Phi_{j,\ell} \rangle = \sum_k \bar{h}_k \langle f, \Phi_{j-1,2\ell+k} \rangle = \sum_k \bar{h}_k a_{j-1,2\ell+k} \\ d_{j,\ell} &:= \langle f, \psi_{j,\ell} \rangle = \sum_k \bar{g}_k \langle f, \Phi_{j-1,2\ell+k} \rangle = \sum_k \bar{g}_k a_{j-1,2\ell+k} \end{aligned}$$

Startet man also mit, sagen wir, $a_{0,k} = \langle f, \Phi(\cdot - k) \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, so lassen sich aus den obigen Rekursionen die Koeffizienten der Wavelet-Reihe berechnen ohne explizit Φ bzw. ψ zu benutzen!

Jetzt nehmen wir umgekehrt an, daß wir für ein großes $j_1 \in \mathbb{Z}$ die Koeffizienten

$$a_{j_1,\ell} = \langle f, \Phi_{j_1,\ell} \rangle \quad \text{und} \quad d_{j_1,\ell} = \langle f, \psi_{j_1,\ell} \rangle, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

haben, und daß wir f rekonstruieren bzw. synthetisieren wollen.

Synthese: (Übergang von j zu $j-1$; von "grob" zu "fein")

Es gilt: $P_{j-1}f = P_j f + Q_j f := \sum_k a_{j,k} \Phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}$, $j \leq j_1$ und deshalb sowie wegen (3) und (4) für alle $j \leq j_1$, $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a_{j-1,\ell} &= \langle f, \Phi_{j-1,\ell} \rangle = \langle P_{j-1}f, \Phi_{j-1,\ell} \rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} \langle \Phi_{j,k}, \Phi_{j-1,\ell} \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \Phi_{j-1,\ell} \rangle \end{aligned}$$

Es folgt:

$$a_{j-1,\ell} = \sum_k a_{j,k} h_{\ell-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{\ell-2k}$$

Daraus lassen sich dann auch alle $d_{j,\ell}$, $j < j_1$, $\ell \in \mathbb{Z}$, berechnen.

4 Literatur

- C. Blatter: Wavelets - Eine Einführung, Vieweg, Braunschweig, 1998.
- C. de Boor: Splinefunktionen, Birkhäuser, Basel, 1990.
- C.K. Chui: An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego 1992.
- I. Daubechies: Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- G. Hämmerlin und K.-H. Hoffmann: Numerische Mathematik, Springer, Berlin, 1994.
- R. Hettich und P. Zencke: Numerische Methoden der Approximation und semi-infiniten Optimierung, Teubner, Stuttgart, 1982.
- E. Isaacson und H. B. Keller: Analyse numerischer Verfahren, Edition Leipzig, 1972.
- A.K. Louis, P. Maaß und A. Rieder: Wavelets: Theorie und Anwendungen, Teubner, Stuttgart 1994.
- M. J. D. Powell: Approximation Theory and Methods, Cambridge University Press, Cambridge, 1981 (1991).
- T. J. Rivlin: Chebyshev Polynomials, Wiley, New York, 1990.