EIN VERFAHREN ZUR NUMERISCHEN SIMULATION STOCHASTISCHER PROZESSE

W. RÖMISCH ; R. SCHULZE

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren zur Simulation stochastischer Prozesse vorzustellen, das unmittelbar auf Digitalrechnern numerisch realisiert werden kann und ohne Hilfe von Zufallsgeneratoren arbeitet. Dieses Verfahren beruht darauf, daß stochastische Prozesse in Räumen von Zufallsvariablen durch Prozesse mit endlich vielen Realisierungen approximiert werden. Dabei kann man sowohl die Realisierungen der approximierenden Prozesse als auch die Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens direkt aus der Verteilung bzw. Verteilungsdichte des Prozesses bestimmen. Grundlage des Verfahrens ist die Approximation der σ-Algebra des Prozesses.

Im folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $I \subseteq R^1$ ein Intervall, x ein stochastischer Prozeß über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Parametermenge I und Zustandsraum R^1, $\mathfrak{B}^1$ die Borelsche σ-Algebra über R^1.
$\mathfrak{A}_x \underset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{A}(\{[x(t)]^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}^1, t \in I\}) \subseteq \mathfrak{A}$ sei die σ-Algebra des Prozesses x, d.h. $\mathfrak{A}_x$ ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der jede Zufallsvariable $x(t)$, $t \in I$, des Prozesses x meßbar ist. Ist z eine Zufallsvariable über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so sei analog $\mathfrak{A}_z \underset{\mathrm{def}}{=} \{z^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}^1\}$. $L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit der Norm $\|\cdot\|_p$ seien die Banachräume der p-fach integrierbaren (reellen) Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Für beliebiges $z \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bezeichne

$E(z \mid A) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{P(A)} \int_A z(\omega)\, dP$ den bedingten Erwartungswert von z bzgl. $A \in \mathfrak{A} (P(A) > 0)$

$E^{\tilde{\mathfrak{A}}} z \in L_1(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}, P)$ die bedingte Erwartung von z bzgl. der σ-Algebra $\tilde{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A}$.

Für die Definition dieser Begriffe und Eigenschaften siehe /1/ und /2/.

Mit diesen wahrscheinlichkeitstheoretischen Hilfsmitteln werden nun die stochastischen Prozesse charakterisiert, für die das abzuleitende Verfahren anwendbar ist.

1. Definition:

Ein stochastischer Prozeß x heißt separabel konstruierbar, wenn es eine Folge $\{z_i\}_{i\in nz}$ von Zufallsvariablen über $(\Omega,\mathcal{A},P)$ gibt, so daß $\mathcal{A}_x \underset{P}{\subseteq} \mathcal{A}(\bigcup_{i\in nz} \mathcal{A}_{z_i})$.

($\underset{P}{\subseteq}$ bedeutet, daß P-äquivalente Ereignisse bei der Relation $\subseteq$ nicht unterschieden werden.)

2. Satz:

(a) Ist x ein stochastisch stetiger Prozeß und $S\subseteq I$ eine beliebige in I dichte und abzählbare Menge, so ist x separabel konstruierbar mit $\{x(t)\}_{t\in S}$.

(b) Ist $x\in[I, L_p(\Omega,\mathcal{A},P))$ ein BOCHNER-meßbarer stochastischer Prozeß, so existiert ein separabel konstruierbarer Prozeß $\hat{x}$ mit $\hat{x}(t) = x(t)$ für fast alle $t\in I$.

Beweis:

(a) vgl. /4/, Kapitel 6.2.

(b) Nach Definition der BOCHNER-Meßbarkeit (vgl./3/) kann x fast überall durch Prozesse, die nur endlich viele Werte annehmen, im p-ten Mittel approximiert werden. Der weitere Beweisweg verläuft nun analog zu (a).

3. Bemerkung:

Nach Satz 2(a) sind im p-ten Mittel stetige Prozesse ($x\in C(I,L_p(\Omega,\mathcal{A},P))$) und R-stetige Prozesse separabel konstruierbar mit $\{x(t)\}_{t\in S}$ ($S\subseteq I$ abzählbar und dicht).

4. Konstruktion der Approximation für (mit $\{z_i\}_{i\in nz}$) separabel konstruierbare stochastische Prozesse $x\in[I,L_1(\Omega,\mathcal{A},P))$

(siehe /4/, Kapitel 6.3.1.)

(A) Wir wählen $\left\{\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{n}\right\}_{n\in nz} \subseteq \mathfrak{B}^1$ mit den Eigenschaften

(i) $I_j^{(n)} \cap I_{j'}^{(n)} = \phi$ für $j\neq j'$, $\bigcup_{j=1}^{n} I_j^{(n)} = R^1$, $n\in nz$;

(ii) $\mathcal{A}(\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{n}) \subseteq \mathcal{A}(\{I_j^{(n+1)}\}_{j=1}^{n+1})$, $n\in nz$;

(iii) $\mathcal{A}(\left\{\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{n}\right\}_{n\in nz}) = \mathfrak{B}^1$

(B) Wir definieren $A_l^{(n,k)} \underset{\text{def}}{=} [(z_1,\dots,z_k)]^{-1}(\mathop{\times}_{i=1}^{k} I_{l_i}^{(n)})$, $l=1,\dots,n^k$, wobei jedem l eineindeutig ein k-tupel $(l_1,\dots,l_k)$ mit $l_i\in\{1,\dots,n\}$ für $i=1,\dots,k$ zugeordnet sei; weiter wird definiert

$$\mathcal{A}^{(n,k)} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{A}(\{A_l^{(n,k)}\}_{l=1}^{n^k}) \subseteq \mathcal{A} \quad (n,k\in nz).$$

(C) Wir definieren $x_{n,k}\in[I,L_1(\Omega,\mathcal{A},P))$:

$$x_{n,k}(t) \underset{\text{def}}{=} E^{\mathcal{A}^{(n,k)}}(x(t)),\ t\in I,\ n,k\in nz.$$

Der Einfachheit halber führen wir eine Numerierung von $\{(n,k)\mid n,k\in nz\}$ z.B. nach dem CANTORschen Diagonalprinzip durch, bezeichnen den neuen Index mit m und die entsprechenden Ausdrücke mit $A_l^{(m)}$, $\mathcal{A}^{(m)}$, x_m und $s(m) \underset{\text{def}}{=} n^k$.

5. Eigenschaften:

(a)(i) $A_l^{(m)} \cap A_{l'}^{(m)} = \phi$, $l\neq l'$, $\bigcup_{l=1}^{s(m)} A_l^{(m)} = \Omega$, $m\in nz$;

(ii) $\mathcal{A}^{(m)} \subseteq \mathcal{A}^{(m+1)}$, $m\in nz$;

(iii) $\mathcal{A}_x \underset{P}{\subseteq} \mathcal{A}(\bigcup_{m\in nz} \mathcal{A}^{(m)}) = \mathcal{A}(\bigcup_{i\in nz} \mathcal{A}_{z_i})$

(b) $$x_m(t) = \sum_{\substack{l=1\\ P(A_l^{(m)})>0}}^{s(m)} E(x(t)\mid A_l^{(m)})\, 1_{A_l^{(m)}},\ t\in I,\ m\in nz.$$

Beide Eigenschaften sind unmittelbare Folgerungen aus 4.

6. Satz (über die Approximation):

Vor.: $x\in[I,L_1(\Omega,\mathcal{A},P))$ sei separabel konstruierbar, $\{x_m\}_{m\in nz}$ sei wie in 4. konstruiert.

Beh.: (a) Für alle $t\in I$ gilt:

$\lim_{m\to\infty} |x_m(t,\omega) - x(t,\omega)| = 0$ P-f.ü.

$\lim_{m\to\infty} \|x_m(t) - x(t)\|_p = 0$, falls $x(t)\in L_p(\Omega,\mathcal{A},P)$

(b) Ist I kompakt und $x\in C(I,L_2(\Omega,\mathcal{A},P))$, so gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \max_{t\in I} \|x_m(t) - x(t)\|_2 = 0$$

Beweis:

(a) $\{\mathfrak{a}^{(m)}\}_{m \in nz}$ bildet eine aufsteigende Folge von σ-Algebren und für $\hat{\mathfrak{a}} \underset{\text{df}}{=} \mathfrak{a}(\bigcup_{m \in nz} \mathfrak{a}^{(m)})$ gilt:

$x(t) = E^{\mathfrak{a}_x}(x(t)) = E^{\hat{\mathfrak{a}}}(x(t))$ für alle $t \in I$.

Deshalb folgt (a) aus den Eigenschaften der bedingten Erwartung (siehe /2/, S.141/42).

(b) siehe /4/, Kapitel 6.3.3.

7. Satz (Fehlerabschätzung):

Vor.: (a) Für $x \in [I, L_2(\Omega, \mathfrak{a}, P))$ existieren $\lambda > 0$, $\alpha \in (0,1]$ so daß $\|x(t) - x(s)\|_2 \leq \lambda |t - s|^{\alpha}$, für $t, s \in I$; fast alle Realisierungen von x seien gleichmäßig beschränkt.

(b) Es sei $\{t_i\}_{i \in nz} \subseteq I$ dicht in I und die Konstruktion 4. sei mit $z_i = x(t_i)$, $i \in nz$, durchgeführt.

Beh.:
$$\|x_{n,k}(t) - x(t)\|_2 \leq \min_{i=1,\dots,k} \Big[2\lambda |t - t_i|^{\alpha} + \Big(\sum_{j=1}^{n} (d_j^{(n)})^2 P([x(t_i)]^{-1}(I_j^{(n)}))\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]$$
$$\leq 2\lambda \min_{i=1,\dots,k} |t - t_i|^{\alpha} + \max_{j=1,\dots,n} d_j^{(n)}$$

für alle $t \in I$, $n,k \in nz$, wobei

$$d_j^{(n)} \underset{\text{df}}{=} \begin{cases} 0 & \text{, falls } \max_{i=1,\dots,k} P([x(t_i)]^{-1}(I_j^{(n)})) = 0 \\ \sup_{r_1, r_2 \in I_j^{(n)}} |r_1 - r_2| & \text{, sonst} \end{cases}$$

$(j = 1,\dots,n)$

Beweis:

Aus 4., den Voraussetzungen und der Dreiecksungleichung ergibt sich für beliebige $t \in I$, $n,k \in nz$, $i \in \{1,\dots,k\}$:

$$\|x_{n,k}(t) - x(t)\|_2 \leq \|x_{n,k}(t) - x_{n,k}(t_i)\|_2 + \|x_{n,k}(t_i) - x(t_i)\|_2 + \|x(t_i) - x(t)\|_2$$
$$\leq 2\lambda |t - t_i|^{\alpha} + \|x_{n,k}(t_i) - x(t_i)\|_2$$
$$\leq 2\lambda |t - t_i|^{\alpha} + \|z_{n,k} - x(t_i)\|_2$$

für jedes $z_{n,k} \in L_2(\Omega, \mathfrak{a}^{(n,k)}, P)$.

Wählt man $z_{n,k}$ speziell (vgl. /4/, 6.3.3.) so, daß $z_{n,k}(\omega) \in I_j^{(n)}$ gdw. $x(t_i, \omega) \in I_j^{(n)}$, so gilt

$|z_{n,k}(\omega) - x(t_i, \omega)| \leq d_j^{(n)}$ für $\omega \in [x(t_i)]^{-1}(I_j^{(n)})$ und

folglich $\|z_{n,k} - x(t_i)\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{n} (d_j^{(n)})^2 P([x(t_i)]^{-1}(I_j^{(n)}))$.

8. Bestimmung der Realisierungen der approximierenden Prozesse für einen stochastisch stetigen Prozeß x aus den endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen $F_x(\cdot;\cdot)$ von x (vgl. /4/, Kapitel 6.5.):

Gegeben seien $n,k \in nz$, $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathfrak{B}^1$, $\{t_i\}_{i=1}^{k} \subseteq I$. Dann gilt nach 4. mit $z_i = x(t_i)$:

(I) $$P(A_l^{(n,k)}) = \int_{A_l^{(n,k)}} dP = \int_{I_{l_1}^{(n)}} \cdots \int_{I_{l_k}^{(n)}} dF_x(t_1 \dots t_k; a_1 \dots a_k)$$

(II) $$E(x(t) | A_l^{(n,k)}) P(A_l^{(n,k)}) = \int_{A_l^{(n,k)}} x(t,\omega)\, dP$$
$$= \int_R \int_{I_{l_1}^{(n)}} \cdots \int_{I_{l_k}^{(n)}} a_0 dF_x(t, t_1 \dots t_k; a_0, a_1 \dots a_k)$$

für $l = 1,\dots,n^k$, $l \longleftrightarrow (l_1,\dots,l_k)$ (vgl. 4.), $t \in I$.

Analoge Beziehungen ergeben sich mit Hilfe der Verteilungsdichtefunktionen.

9. Bemerkungen:

(a) $P(A_l^{(n,k)})$, $E(x(t)|A_l^{(n,k)})P(A_l^{(n,k)})$ $(l=1,\dots,n^k)$ stellen selbst gewisse Kenngrößen des stochastischen Prozesses x dar (vgl. /4/, Kapitel 6.5.; /6/). Aus diesem Grunde ist es möglich, sie direkt aus Messungen zu gewinnen. Dabei erfordert die praktische Messung dieser Kenngrößen nicht mehr Aufwand als die Messung vergleichbarer Verteilungsfunktionen.

(b) Sind die $I_j^{(n)}$, $j=1,\dots,n$, Intervalle und ist die k-dimensionale Verteilungsfunktion von x bekannt, so kann die Berechnung von $P(A_l^{(n,k)})$, $l=1,\dots,n^k$, exakt erfolgen (vgl. /5/, S.149). I.a. müssen zur Bestimmung von

(I) und (II) Methoden der numerischen Integration angewendet werden. Dies wird bei (II) besonders durch den uneigentlichen Integralanteil erschwert.

10. Bestimmung der Realisierungen der approximierenden Prozesse für stochastisch stetige zentrierte Gaußsche Prozesse x aus der Autokorrelationsfunktion R_{xx} von x (vgl./4/,6.5.):

Auf Grund der speziellen Gestalt der Verteilungsdichte erhält man aus 8.: (II) $E(x(t_o)|A_1^{(n,k)})P(A_{l_2}^{(n,k)})$

$$= \frac{-1}{b_o}(b_o(2\pi)^k \det(R_x))^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{I_{l_1}^{(n)}} \cdots \int\limits_{I_{l_k}^{(n)}} c_o \exp(\tfrac{1}{2}(\tfrac{c_o^2}{b_o} - d_o))da_1 \ldots da_k$$

wobei $R_x \overset{=}{\text{def}} (R_{xx}(t_i,t_j))_{i,j=0,\ldots,k}$, $R_x^{-1} = (r_{ij})_{i,j=0,\ldots,k}$

$b_o \overset{=}{\text{def}} r_{oo}$, $c_o \overset{=}{\text{def}} \sum\limits_{j=1}^{k} r_{oj}\, a_j$, $d_o \overset{=}{\text{def}} \sum\limits_{i,j=1}^{k} a_i r_{ij} a_j$,

für $l=1,\ldots,n^k$, $l \longleftrightarrow (l_1,\ldots,l_k)$, $n,k \in nz$, $t_o \in I$.
Eine analoge Beziehung ergibt sich auch für (I).

11. Bemerkungen:

(a) Für den in 10. behandelten Fall wurde in /4/ ein ALGOL-Programm zur numerischen Berechnung von (I) und (II) aus der Korrelationsfunktion R_{xx} erarbeitet. Als Anwendung ist z.B. die Simulation des WIENER-Prozesses als stetiger zentrierter Gaußscher Prozeß mit $R_{xx}(t,s) = \min(t,s)$ möglich.

(b) Eine Vereinfachung der Beziehungen für (I) und (II) wie in 10. erscheint auch im Fall anderer spezieller Klassen von stochastischen Prozessen (z.B. Markowsche) denkbar.

(c) Da der Aufwand des Verfahrens mit n^k schnell anwächst, ist für feste $n,k \in nz$ die konkrete Wahl von $\{t_i\}_{i=1}^{k}$, $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{n}$ von Bedeutung. Es kommt darauf an, diese Wahl dem statistischen Verhalten von x anzupassen. Satz 7 sagt aus, daß man die Unterteilung $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{n}$ dort möglichst "fein" wählen sollte, wo der Prozeß mit großer Wahrscheinlichkeit Werte annimmt und sie dort "gröber" wählen kann, wo diese Wahrscheinlichkeit geringer ist.

Aus Satz 7 folgt ferner, daß die Wahl von n bzw. k unmittelbar von der Größe des effektiven Wertebereiches von x bzw. der Größe seiner Lipschitzkonstanten λ abhängt. Ausgehend von guten praktischen Ergebnissen erscheint aber die Fehlerabschätzung 7. zu "pessimistisch".

(d) Die Art und Weise der Konstruktion der Approximation ermöglicht eine Anwendung zur numerischen Behandlung von nichtlinearen stochastischen Differentialgleichungen (vgl. /4/, /6/) und von stochastischen Optimalsteuerungsproblemen (vgl./7/).

Literatur:

/1/ Bauer,H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Berlin 1964

/2/ Prohorov,Yu.V., Rozanov,Yu.A.: Wahrscheinlichkeitstheorie (russ.), Moskau 1973

/3/ Gajewski,H., Gröger,K., Zacharias,K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Berlin 1974

/4/ Römisch,W., Schulze,R., Sohr,D.: Kennwertmethoden für Volterrasche Integralgleichungen in stochastischen Prozessen, Dissertation A, Humb.-Univ. Berlin, 1976

/5/ Renyi,A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1966

/6/ Schulze,R., Römisch,W.: Numerische Methoden für stochastische Differentialgleichungen, in diesem Heft

/7/ Römisch,W., Schulze,R.: Kennwertmethoden zur Behandlung des Tracking-Problems mit stochastischen Parametern, Forschungsbericht, Humb.-Univ. Berlin, 1975

Anschrift der Verfasser:

Dr. Werner Römisch; Dr. Reinhard Schulze
Humboldt-Universität, Sektion Mathematik, Bereich Numerik
1086 Berlin, Unter den Linden 6, PSF 1297