Wavelets

gehalten von

Werner Römisch

Vorlesung
im Sommersemester 2011

Humboldt-Universität Berlin
Institut für Mathematik

Inhalt: Seite

0 Einleitung

Wavelets sind neuartige Basisfunktionen zur Darstellung und Rekonstruktion von Funktionen auf $\mathbb{R}$ (linguistisch: „Wellchen“). Ihr Ursprung stammt aus der Signalanalyse und den Ingenieurwissenschaften. Inzwischen existieren bemerkenswerte Anwendungen wie z.B. die Anwendung von Wavelets bei der Digitalisierung von Fingerabdrücken (vgl. C.M. Brishawn: Fingerprints go digital, Notices of the AMS 42 (1995), 1278-1283).

Die klassische Approximationstheorie von Funktionen war auf

- (stückweise) Polynome (vgl. Vorlesung Numerik I)
- trigonometrische Polynome (Fourier-Analyse; hier nur am Rande behandelt)

orientiert.
Die Fourier-Analyse ist Ausgangspunkt, kritischer Wegweiser, aber auch theoretische Grundlage dessen, was wir später Wavelet-Analysis nennen werden.

Die Fourier-Analyse von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ arbeitet mit der speziellen analysierenden Funktion $t \mapsto \exp(it)$, die mit einem reellen Frequenzparameter ω gestaucht (dilatiert) wird, d. h., mit der Funktionsfamilie $t \mapsto \exp(i\omega t)$ $(\omega \in \mathbb{R})$.
Die trigonometrischen Funktionen schwingen unendlich lang mit derselben „ewigen“ Periode. Deshalb berücksichtigen sie das lokale Verhalten einer Funktion f nur unzureichend und sind für Funktionen auf $\mathbb{R}$ wenig geeignet.

Bei den Wavelets wird mehr Flexibität dadurch erreicht, daß eine geeignete analysierende Funktion ψ (die zunächst fast beliebig wählbar ist), das sog. „Mutter-Wavelet“ zur Analyse von f verschoben und gestaucht wird. Man betrachtet die Familie von Funktionen:

$$t \mapsto \frac{1}{|a|^{\frac{1}{2}}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad ((a,b) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}).$$

Hierbei ist $|a|^{\frac{1}{2}}$ ein später zu erklärender Normierungsfaktor.

Beispiel 0.1 *: Haar-Wavelet*

$$\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \quad sonst \end{cases} \qquad\qquad supp\ \psi_H = [0,1)$$

Aus der obigen Konstruktion entstehen mit $a = 2^j$ und $b = k2^j (j, k \in \mathbb{Z})$ die (Wavelet-) Funktionen

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi_H\left(\frac{t-k2^j}{2^j}\right) = 2^{-j/2}\psi_H(2^{-j}t - k),\ \forall t \in \mathbb{R},\ mit$$

$$supp\ \psi_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j),\ \forall j,k \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei bedeutet ein großes (kleines) $j \in \mathbb{Z}$, daß eine „lang- (kurz-) welligere“ Wavelet-Funktion vorliegt.
Später zeigen wir in Kap. 3, daß $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ darstellt. Also ist eine Fourier-Entwicklung von Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ nach diesem Basis-System (Haar 1910) möglich.

Ziel dieser Vorlesung ist eine Einführung in die Wavelet-Analysis und dabei insbesondere

- der Ausbau des obigen allgemeinen Ansatzes nebst Suche nach geeigneten Mutter-Wavelets ψ;

- die Darstellung einer allgemeinen Theorie solcher Basis-Systeme;

- die Beschreibung schneller Algorithmen zur Berechnung von Wavelet-Koeffizienten bzw. zur Rekonstruktion der Funktion aus diesen.

Literatur:
C. Blatter: Wavelets – Eine Einführung, Vieweg, Braunschweig 1998.
A. K. Louis, P. Maass und A. Rieder: Wavelets: Theorie und Anwendungen, Teubner, Stuttgart 1994.
I. Daubechies: Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

1 Grundlagen der Fourier-Analyse

Die Fourier-Analyse ist eine wichtige theoretische Basis und zugleich ein kritischer Wegweiser in Richtung Wavelet-Analysis.
Wir betrachten in diesem Kapitel die folgenden linearen normierten bzw. unitären Räume von Funktionen über den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen:

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ ist meßbar}, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty \text{ bzw. } \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \right\},$$

wobei $1 \le p < \infty$ bzw. $p = \infty$ und $L_2(\mathbb{R}^n)$ und $L_p(\mathbb{R}^n)$ werden versehen wird mit dem Skalarprodukt bzw. der Norm

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} dx \\
\|f\|_p &:= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \le p < \infty) \\
\|f\|_\infty &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf\{C : |f(x)| \le C, \text{ f.ü. in } \mathbb{R}^n\}.
\end{aligned}$$

Dabei werden Funktionen, die fast überall im Sinne des Lebesgueschen Maßes übereinstimmen, identifiziert. Alle diese Räume sind vollständig, d.h., Banach- bzw. Hilberträume.

Definition 1.1
Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f$ einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle \omega, x\rangle) f(x)dx, \ \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 1.2

a) *$\mathcal{F}$ ist eine lineare beschränkte Abbildung von $L_1(\mathbb{R}^n)$ in $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

b) *$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$ und es gilt $\lim\limits_{|\omega| \to \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.*

c) *Existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |f_\alpha(x)|dx < \infty$ für die Funktion $f_\alpha(x) := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, so besitzt $\hat{f}$ die stetige partielle Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|}\hat{f}}{\partial \omega_1^{\alpha_1} \cdots \partial \omega_n^{\alpha_n}}$ und es gilt*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\hat{f}}{\partial \omega_1^{\alpha_1} \cdots \partial \omega_n^{\alpha_n}} = (-i)^{|\alpha|} \hat{f}_\alpha, \ \textit{wobei } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

d) *Existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ von $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und gehört zu $L_1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)(\omega) = i^{|\alpha|} \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_n^{\alpha_n} \mathcal{F}(f)(\omega), \ \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Beweis:</u>

a) $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $\forall \omega \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle \omega, x\rangle) f(x) dx \right| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\exp(-i\langle \omega, x \rangle)| \, |f(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Also gilt: $\|\hat{f}\|_\infty = \|\mathcal{F}f\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1$.

$\mathcal{F}$ ist außerdem linear und folglich ein linearer beschränkter Operator von $L_1(\mathbb{R}^n)$ in $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Es seien $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\omega, \delta \in \mathbb{R}^n$ und beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\exp(-i\langle(\omega + \delta), x\rangle - \exp(-i\langle \omega, x\rangle)| \, |f(x)| dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\exp(-i\langle \delta, x\rangle) - 1| \, |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \sup_{\omega\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\omega+\delta)-\hat{f}(\omega)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\exp(-i\langle\delta,x\rangle)-1||f(x)|dx.$$

Wir untersuchen nun das Verhalten des Integrals auf der rechten Seite für $|\delta|\to 0$ mit Hilfe des Lebesgueschen Satzes. Zunächst ist klar:

$$|\exp(-i\langle\delta,x\rangle)-1|\,|f(x)| \le 2|f(x)|,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\delta>0,$$

d. h. es existiert eine integrierbare Majorante mit $2|f(\cdot)|$.
Außerdem gilt für fast alle $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\delta\to 0} |\exp(-i\langle\delta,x\rangle)-1|\,|f(x)| = 0\,.$$

Also folgt aus dem Lebesgueschen Satz

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\omega\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\omega+\delta)-\hat{f}(\omega)| = 0$$

und $\hat{f}$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$.
Den zweiten Teil der Aussage beweisen wir nur für $n=1$. Es sei $f\in L_1(\mathbb{R})$. Falls f differenzierbar mit $f'\in L_1(\mathbb{R})$ ist, so folgt aus d), daß

$$\begin{aligned} & |\hat{f}(\omega)| = \tfrac{1}{|\omega|}|\hat{f}(\omega)| \le \tfrac{1}{|\omega|}\|\hat{f}'\|_\infty \le \tfrac{1}{|\omega|}\|f'\|_1,\ \forall\omega\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \rightsquigarrow\ & |\hat{f}(\omega)|\to 0,\ \text{falls } |\omega|\to\infty. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Da die Menge aller auf $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen aus $L_1(\mathbb{R})$, deren Ableitung ebenfalls zu $L_1(\mathbb{R})$ gehört, dicht in $L_1(\mathbb{R})$ ist, existiert zu einen beliebig vorgegebenen $\varepsilon>0$ ein $g\in L_1(\mathbb{R})$ mit $g'\in L_1(\mathbb{R})$ und $\|f-g\|_1<\epsilon$.
Dann gilt nach a) für jedes $\omega\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &\le |\hat{f}(\omega)-\hat{g}(\omega)|+|\hat{g}(\omega)| \le \|f-g\|_1+\tfrac{1}{|\omega|}\|g'\|_1 \\ &\le \epsilon+\tfrac{1}{|\omega|}\|g'\|_1 \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.

c) Wir beweisen die Aussage nur für $n=1$ und $\alpha=1$. Dann gilt für den Differenzenquotienten mit $h\neq 0$:

$$\frac{1}{h}(\hat{f}(\omega+h)-\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp(-i\omega x)\frac{\exp(-ihx)-1}{h}dx\,.$$

Der Integrand g_h des Integrals auf der rechten Seite erlaubt die Abschätzung

$$|g_h(x)| \le |f(x)||x| \quad (\forall h\neq 0).$$

Nach dem Lebesgueschen Satz existiert deshalb der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h\to 0$, d.h., $\hat{f}$ ist differenzierbar und es gilt

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp(-i\omega x)f(x)(-ix)dx\,.$$

Also gilt: $\hat{f}'(\omega) = -i\hat{f}_1(\omega)$, $\forall\omega\in\mathbb{R}$, wobei $f_1(x):=xf(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Aus tEIL b) folgt, daß $\hat{f}'$ stetig ist. Die Aussage für $n>1$ und beliebiges α folgt durch wiederholte Anwendung der obigen Überlegung.

d) Wir führen den Beweis nur für $n = 1$. Es sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ differenzierbar mit $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt für jedes $N > 0$ mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N} \exp(-i\omega x)f'(x)dx &= [\exp(-i\omega x)f(x)]_{-N}^{N} - \int_{-N}^{N} (-i\omega)\exp(-i\omega x)f(x)dx \\ &= [\exp(-i\omega x)f(x)]_{-N}^{N} + i\omega - \int_{-N}^{N} \exp(-i\omega x)f(x)dx\end{aligned}$$

Daraus folgt für $N \to \infty$ wegen $|f(x)| \to 0$ falls $|x| \to \infty$:

$$\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f')(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega) = i\omega(\mathcal{F}f)(\omega),\ \forall\omega \in \mathbb{R}.$$ □

Beispiel 1.3
Trotz der Aussage in Satz 1.2 d) folgt aus $f \in L_1(\mathbb{R})$ keineswegs $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$!
Dies sieht man an folgendem Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \exp(-x)\chi_{[0,\infty)}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \\ \rightsquigarrow \hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) &= \int_0^\infty \exp(-i\omega x)\exp(-x)dx = \int_0^\infty \exp(-(i\omega+1)x)dx \\ &= \tfrac{-1}{1+i\omega}[\exp(-(1+i\omega)x)]_0^\infty = \tfrac{1}{1+i\omega},\ \forall\omega \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wegen $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|}$ für große $\omega > 0$, gilt $\hat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$.

Satz 1.4

a) Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $(T_h f)(x) := f(x-h),\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall h \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt

$$(\mathcal{F}(T_h f))(\omega) = \exp(-i\langle\omega, h\rangle)(\mathcal{F}f)(\omega),\ \forall\omega \in \mathbb{R}^n\ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

b) Es seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, das sog. Faltungsprodukt. Dann gilt:

$$(\mathcal{F}(f * g))(\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathcal{F}f)(\omega)(\mathcal{F}g)(\omega),\ \forall\omega \in \mathbb{R}\ .$$

Beweis:

a) Mit f gehört natürlich auch $T_h f$ zu $L_1(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(T_h f))(\omega) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega, x\rangle)f(x-h)dx \quad (\text{ Substitution: } t = x-h) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega, t+h\rangle f(t)dt = \exp(-i\langle\omega, h\rangle)\hat{f}(\omega),\ \forall h \in \mathbb{R}^n\ .\end{aligned}$$

b) Wegen $|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|\,|g(t)|dt\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|\,|g(t)|dt\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|dx\right) dt = \|g\|_1\|f\|_1,\end{aligned}$$

d. h. $f * g$ gehört zu $L_1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}(f * g)$ ist wohl-definiert.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow (\mathcal{F}(f*g))(\omega) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega, x\rangle) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt\,dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega, x\rangle) f(x-t)dx \right) g(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}(T_t f))(\omega) g(t)dt \\
\text{(wegen a))} \quad &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega, t\rangle) g(t)dt \cdot \hat{f}(\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \qquad \square
\end{aligned}$$

Definition 1.5 *Es sei $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierte einer gewissen Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die inverse Fourier-Transformierte von $\hat{f}$ definiert durch*

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle\omega, x\rangle)\hat{f}(\omega)d\omega \,.$$

Nachfolgend beschäftigen wir uns nun mit den Fragen, wann $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ gilt und wie der Wertebereich von $\mathcal{F}$ charakterisiert werden kann. Als Beweishilfsmittel benötigen wir dazu zunächst weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation.
Dazu benötigen wir eine approximative Faltungs-Indentität, d.h. Funktionen $\{e_\alpha : \alpha > 0\}$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$, so daß $f * e_\alpha \approx f$ für hinreichend kleines α gilt.

Lemma 1.6
Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $e_\alpha(x) := (\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}})^n \exp(-\frac{|x|^2}{4\alpha})$, $\forall \alpha > 0$, wobei $|x|$ die Euklidische Norm von x bezeichnet.
Dann gilt $\lim\limits_{\alpha\to 0+} (f * e_\alpha)(x) = f(x)$ in jedem $x \in \mathbb{R}^n$, in dem f stetig ist.

Beweis:
Es sei f stetig in $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir wählen nun $\eta > 0$, so daß

$$|f(x-t) - f(x)| \le \varepsilon \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |t| \le \eta.$$

Ferner gilt für beliebige $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e_\alpha(x)dx &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\alpha}\right) dx \text{ (Substitution: } t_i = \tfrac{x_i}{2\sqrt{\alpha}},\ i = 1,\dots,n) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n \exp(-t_i^2)dt_1 \cdots dt_n = 1
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für beliebige $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
|(f * e_\alpha(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))e_\alpha(t)dt \right| \\
&\le \int_{|t|\le\eta} |f(x-t) - f(x)|e_\alpha(t)dt + \int_{|t|\ge\eta} |f(x-t) - f(x)|e_\alpha(t)dt \\
&\le \varepsilon \int_{|t|\le\eta} e_\alpha(t)dt + \int_{|t|\ge\eta} |f(x-t)|e_\alpha(t)dt + \int_{|t|\ge\eta} |f(x)|e_\alpha(t)dt \\
&\le \varepsilon + \|f\|_1 \max_{|t|\ge\eta} e_\alpha(t) + |f(x)| \int_{|t|\ge\eta} e_\alpha(t)dt \ \text{ (Subst.: } \tau_i = \tfrac{t_i}{\sqrt{\alpha}},\ i = 1,\dots,n) \\
&= \varepsilon + \|f\|_1 \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\right)^n \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n |f(x)| \int_{|\tau|\ge\frac{\eta}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4}\right)d\tau
\end{aligned}$$

Für $\alpha \to 0+$ gilt aber $(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}})^n \exp(-\frac{\eta^2}{4\alpha}) \to 0$ und $\int\limits_{|\tau|\geq\frac{\eta}{\alpha}} \exp(-\frac{\tau^2}{4})d\tau \to 0$ und die Aussage ist bewiesen. $\square$

Satz 1.7
Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $\hat{f} := \mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.
Dann gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, in dem f stetig ist, daß

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) \ .$$

Beweis:
In einer Vorbetrachtung zeigen wir die Gültigkeit der folgenden Formel:
Beh.: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle\omega, x\rangle)\exp(-a|x|^2)dx = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{|\omega|^2}{4a}) \quad (a > 0)$
Bew.: Zunächst gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle\omega, x\rangle)\exp(-a|x|^2)dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega_i x_i - a x_i^2)dx_i \, .$$

Deshalb betrachten wir die Funktion $h(y) := \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-ax^2 + xy)dx, \ y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow h(y) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-a\left(x - \tfrac{y}{2a}\right)^2 + \tfrac{y^2}{4a}\right) dx \\
&= \exp\left(\tfrac{y^2}{4a}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-a\left(x - \tfrac{y}{2a}\right)^2\right) dx \quad (\text{Subst.: } t = \sqrt{a}\left(x - \tfrac{y}{2a}\right)) \\
&= \exp\left(\tfrac{y^2}{4a}\right) \tfrac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}} \exp\left(\tfrac{y^2}{4a}\right) =: \tilde{h}(y).
\end{aligned}$$

Die Funktionen h und $\tilde{h}$ können beide auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Da sie aber auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen, bleibt dies auch auf $\mathbb{C}$ richtig. Für $y = i\omega_i, \omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ folgt daraus die behauptete Formel. $\square$
Im folgenden sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass f in x stetig ist. Wir betrachten die Funktion

$$g(y) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(i\langle y, x\rangle - \alpha|y|^2) \quad (y \in \mathbb{R}^n)$$

und erhalten aus unserer Vorbetrachtung

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega, y\rangle)g(y)dy \\
&= (\tfrac{1}{2\pi})^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega - x, y\rangle)\exp(-\alpha|y|^2)dy \\
&= (\tfrac{1}{2\pi})^n \left(\tfrac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{|\omega - x|^2}{4\alpha}\right) = e_\alpha(x - \omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow (f * e_\alpha)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e_\alpha(x - t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t)dt \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle t, y\rangle)f(t)g(y)dt\,dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y)dy = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, x\rangle)\hat{f}(y)\exp(-\alpha|y|^2)dy
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun das Verhalten dieser Identität für $\alpha \to 0+$.
Nach Lemma 1.6 konvergiert die linke Seite der Identität gegen $f(x)$. Für die rechte Seite verwenden wir wieder den Satz von Lebesgue. Der Integrand besitzt die integrierbare Majorante $|\hat{f}(\cdot)|$ und konvergiert punktweise gegen $\exp(iyx)\hat{f}(y)$ falls $\alpha \to 0+$. Also konvergiert die rechte Seite gegen $(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x)$ und die Aussage ist bewiesen. $\square$

Unser nächstes Ziel ist es, die Fourier-Transformation auch für Funktionen aus $L_2(\mathbb{R}^n)$ zu definieren sowie den Wertebereich von $\mathcal{F}$ besser zu verstehen. Dazu benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 1.8
Es sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ und $F(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\overline{f(y)}dy$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ die sog. Autokorrelationsfunktion von f. Dann ist F gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis:
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir erhalten aus der Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|F(x+\eta) - F(x)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x+\eta+y) - f(x+y))\overline{f(y)}dy \right| \\
&\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \; . \\
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |F(x+\eta) - F(x)| &\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y+\eta) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2
\end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existiert eine stetige Funktion $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ (vgl. Theorem 2.4.14 in R. B. Ash: Measure, Integration and Functional Analysis, Academic Press, New York 1972), da die stetigen Funktionen aus $L_2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ sind. Mit Hilfe der Minkowski-Ungleichung folgt daraus

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y+\eta) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} &\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y+\eta) - g(y+\eta)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y+\eta) - g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2\|f-g\|_2 + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y+\eta) - g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Für das verbleibende Integral wenden wir wieder den Lebesgueschen Satz für $\eta \to 0$ an. Der Integrand konvergiert punktweise gegen 0 und ist gleichmäßig beschränkt, da g als stetige Funktion aus $L_2(\mathbb{R})$ beschränkt sein muß.

Also gilt $\limsup\limits_{\eta\to 0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y+\eta) - f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon$ und die Aussage folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war. $\square$

Satz 1.9
Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\hat{f} = \mathcal{F}f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \quad (\textit{Parseval-Identität}).$$

Beweis:
Wir verwenden wieder die approximativen Faltungs-Identitäten $\{e_\alpha : \alpha > 0\}$ aus Lemma 1.6 und die zugehörigen Fourier-Transformierten

$$\hat{e}_\alpha(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp(-\alpha|\omega|^2), \forall \omega \in \mathbb{R}^n \quad (\text{ vgl. Beweis von Satz 1.7}).$$

Da $\hat{f}$ stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ ist (Satz 1.2), gilt

$$\hat{e}_\alpha(\cdot)|\hat{f}(\cdot)|^2 \in L_1(\mathbb{R}).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{e}_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{e}_\alpha(x)\hat{f}(x)\overline{\hat{f}(x)}dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle y,x\rangle)f(y)dy\,\overline{\int_{\mathbb{R}^n}\exp -i\langle u,x\rangle f(u)du}\;\hat{e}_\alpha(x)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(u)} \left\{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix(u-y))\hat{e}_\alpha(x)dx\right\} du\ dy \\
\text{(Satz 1.7)} \quad &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(u)} e_\alpha(u-y)du\ dy \quad [\text{Subst.: } y = x+u) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(u+x)\overline{f(u)}du\right\} e_\alpha(x)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} F(x)e_\alpha(x)dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, F * e_\alpha(0),
\end{aligned}$$

wobei F die Autokorrelationsfunktion von f ist. Aus Lemma 1.6 folgt zunächst

$$\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{e}_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, F(0),$$

da F stetig in 0 ist (Lemma 1.8). Außerdem folgt aus dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\alpha\to 0+}\inf \left\{\hat{e}_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2\right\} dx &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{f}\|_2^2 \le \lim_{\alpha\to 0+}\inf \int_{\mathbb{R}^n} \hat{e}_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} F(0) = (\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

und folglich $\hat{f} = \mathcal{F}f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Schließlich folgt aus dem Lebesgueschen Satz wegen $0 \le \hat{e}_\alpha|\hat{f}|^2 \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\hat{f}|^2$ auch

$$\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{e}_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} F(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|f\|_2^2. \qquad \square$$

Folgerung 1.10
$\mathcal{F}$ ist ein linearer beschränkter Operator von $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\mathcal{F}\| = 1$. Der Raum $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ und es existiert eine norm-erhaltende Fortsetzung von $\mathcal{F}$ auf ganz $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:
Der erste Teil der Aussage folgt sofort aus Satz 1.9. Außerdem ist die Menge $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ und folglich läßt sich $\mathcal{F}$ auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ normerhaltend fortsetzen. Dies ist wie folgt möglich:
Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n) \setminus L_1(\mathbb{R}^n)$ und (f_k) eine Folge aus $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - f_k\|_2 \to 0$. Dann ist $(\mathcal{F} f_k)$ eine Fundamentalfolge in $L_2(\mathbb{R}^n)$ und man kann definieren

$$\mathcal{F} f_: = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F} f_k \,.$$

Diese Fortsetzung hat alle gewünschten Eigenschaften.
Die Dichtheit von $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ sieht man wie folgt::
Ist $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, so gehören die „gestutzten" Funktionen

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad |x| \le k \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

zu $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|f - f_k\|_2^2 = \int\limits_{|x|\ge k} |f(x)|^2 dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \qquad \square$$

Satz 1.11 *(Plancherel-Formel)*
Die Abbildung $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ gemäß Folgerung 1.10 ist bijektiv und für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

(i) $\langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle$ *(Parseval-Identität),*

(ii) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\overline{g}}(x)dx.$

Beweis:
Nach Satz 1.9 gilt für jedes $h \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n) : \|\hat{h}\|_2^2 = \|h\|_2^2$.
Ist $h \in L_2(\mathbb{R}^n) \setminus L_1(\mathbb{R}^n)$ und (h_k) eine Folge in $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h_k - h\|_2 \to 0$, so gilt $\mathcal{F}h = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}h_k$, d. h., auch

$$\|\hat{h}\|_2^2 = \|\hat{h}\|_2^2 = \lim_{k\to\infty} \|h_k\|_2^2 = \|h\|_2^2\,.$$

Also gilt die Identität: $\|\hat{h}\|_2^2 = \|h\|_2^2, \forall h \in L_2(\mathbb{R}^n)$.
Es seien nun $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ beliebig gewählt. Wir verwenden die obige Indentiät für

$$h \in \{f + g, f - g, f + ig, f - ig\}$$

sowie die Formel für das Skalarprodukt im komplexen Hilbertraum

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2\right) + \frac{1}{4i}\left(\|f-ig\|_2^2 - \|f+ig\|_2^2\right)$$

und erhalten

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\hat{f}+\hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|_2^2\right) + \frac{1}{4i}\left(\|\hat{f}-i\hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f}+i\hat{g}\|_2^2\right) = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle\,.$$

Wegen der Parseval-Indentität ist $\mathcal{F}$ natürlich auch injektiv und es gilt $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.
Um (ii) zu zeigen, nehmen wir zunächst $f,g \in L_1(\mathbb{R}^n)\cap L_2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{g(x)}dx &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle x,y\rangle)f(y)dy\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle x,y\rangle)\overline{g(x)}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{\overline{g}}(y)dy
\end{aligned}$$

Wieder kann die Dichtheit von $L_1(\mathbb{R}^n)\cap L_2(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ausgenutzt werden, um (ii) für beliebige $f,g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.

Es bleibt zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist surjektiv.
Es sei $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ beliebig gewählt. Wir zeigen: $\exists f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $g = \mathcal{F}f$.

Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen:
Für $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $h^-(x) := h(-x)$ („Reflexion“von h). Dann gilt:

$$h^- \in L_2(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{F}(\overline{h^-}) = \overline{\mathcal{F}(h)},\ \mathcal{F}(h^-) = (\mathcal{F}(h))^-\,.$$

<u>Bew.:</u> $h^- \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ist klar; zum Beweis der anderen Aussagen nehmen wir o. B. d. A. an, daß $h \in L_1(\mathbb{R}^n)\cap L_2(\mathbb{R}^n)$ (ansonsten müßte mit Folgen wie in 1.10 argumentiert werden). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\overline{h^-})(\omega) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\omega x)\overline{h(-x)}dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle\omega,y\rangle)\overline{h(y)}dy \\
&= \overline{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega,y\rangle)h(y)dy} = \overline{\mathcal{F}(h)}(\omega) \\
\mathcal{F}(h^-)(\omega) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle\omega,x\rangle)h(-x)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle-\omega,y\rangle)h(y)dy = \mathcal{F}(h)(-\omega)
\end{aligned}$$

<u>Beh.:</u> $g = \mathcal{F}f = \hat{f}$, wobei $f := (\mathcal{F}(g))^-$.
<u>Bew.:</u> Wir zeigen $\|g-\hat{f}\|_2 = 0$. Unter Verwendung der obigen Vorbereitungen sowie von (i) und (ii) gilt:

$$\begin{aligned}
\|g-\hat{f}\|_2^2 &= \|g\|_2^2 - 2Re\langle g,\hat{f}\rangle + \|\hat{f}\|_2^2 = \|\hat{g}\|_2^2 - 2Re\langle g,\hat{f}\rangle + \|\hat{g}^-\|_2^2 \\
\langle g,\hat{f}\rangle &= \langle g,\overline{\hat{\overline{f^-}}}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\hat{\overline{f^-}}(x)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle x,u\rangle)\overline{f^-(u)}du\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)\overline{f^-(u)}du = \langle\hat{g},f^-\rangle = \langle\hat{g},\hat{g}\rangle = \|\hat{g}\|_2^2 \\
\rightsquigarrow \|g-\hat{f}\|_2^2 &= -\|\hat{g}\|_2^2 + \|\hat{g}^-\|_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

□

2 Wavelets

Die Einführung in die Wavelet-Analysis beginnt mit dem Begriff des (Mutter-) Wavelets und mit der Wavelet-Tranformation in Kap. 3. Langfristig suchen wir nach Funktionen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, so daß durch Translation und Dilatation abgeleiteten Funktionen

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t - k), \quad t \in \mathbb{R},$$

in $L_2(\mathbb{R})$ eine hinreichen große Familie darstellen und für die Zielstellungen zu Beginn von Kap. 1 geeignet sind. Der Normierungsfaktor hat dabei die Bedeutung, daß

$$\|\psi_{j,k}\|_2^2 = 2^{-j}\int_{\mathbb{R}} |\psi(2^{-j}t-k)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|_2^2$$

gilt, d.h., daß diese Funktionen alle normiert sind, falls $\|\psi\|_2 = 1$.

Kurzfrisitg schauen wir zunächst nach Funktionen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, die „Wellencharakter“ besitzen.

Definition 2.1
Eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, die die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < C_\psi := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt (Mutter-) Wavelet. Hierbei ist $\hat{\psi} := \mathcal{F}\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 2.2 *(Haar-Wavelet)*

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_H(\omega) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp(-i\omega x)\psi_H(x)dx \\
&= \tfrac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left\{2\exp\left(\tfrac{i\omega}{2}\right) - 1 - \exp(-i\omega)\right\} = \tfrac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left\{\sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{(2^{-k+1}-1)(i\omega)^k}{k!}\right\}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow C_{\psi_H} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_H(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ *ist endlich.*

Eigenschaften 2.3

a) Ist $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet, so gilt $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$ (d.h. ψ hat Wellencharakter).

b) Die Menge aller Wavelets ist dicht in $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis:

a) Wegen $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{\psi}$ stetig, insbesondere in jeder Umgebung von $\omega = 0$ (Satz 1.2). Es sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad C_\psi &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tfrac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{|\omega|\geq\varepsilon} \tfrac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\
&\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tfrac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \tfrac{1}{\varepsilon}\|\hat{\psi}\|_2^2
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ C_ψ ist genau dann endlich, wenn $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ endlich ist.

$\rightsquigarrow$ es muß notwendigerweise $\hat{\psi}(0) = 0$ oder $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$ gelten.

b) Es sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ beliebig $f \neq \Theta$ (o.B.d.A.). Wir zeigen, dass f Grenzwert einer Folge von Wavelets in $L_2(\mathbb{R})$ ist. Wir definieren Funktionen $f_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R})$ für alle $\varepsilon > 0$ durch ihre Fourier-Transformierten

$$\hat{f}_\varepsilon(\omega) := \begin{cases} \hat{f}(\omega) & , \quad |\omega| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad |\omega| < \varepsilon \,. \end{cases}$$

Dies ist nach Satz 1.11 möglich. Dann gilt:

$$C_{f_\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{f}_\varepsilon(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{|\omega| \geq \varepsilon} |\hat{f}(\omega)|^2 \omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{f}\|_2^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$\rightsquigarrow$ f_ε ist ein Wavelet für jedes $\varepsilon > 0$. Außerdem gilt nach 1.11:

$$\|f - f_\varepsilon\|_2^2 = \|\hat{f} - \hat{f}_\varepsilon\|_2^2 = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \to 0 \ \text{ falls } \ \varepsilon \to 0. \qquad \square$$

Eigenschaft 2.3a) rechtfertigt die Bezeichnung „Wavelet“. Sucht man also eine Funktion, die ein Kandidat für ein Wavelet ist, so sollte man zuerst auf die Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

achten.
Die Bedeutung der (stärkeren) Zulässigkeitsbedingung in Def. 2.1 wird später klar. Eigenschaft 2.3b) zeigt auch, daß es ausreichend viele Wavelets gibt. Trotzdem werden wir später einigen Aufwand betreiben, um geeignete Wavelets zu konstruieren. Wir beginnen mit einfachen Beispielen, nachdem wir einfache Kriterien für und Methoden zu Konstruktion von Wavelets bereitgestellt haben.

Satz 2.4

a) Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine k-fach ($k \geq 1$) differenzierbare Funktion und es gelte $\varphi \in L_2(\mathbb{R}), \varphi^{(k)} \in L_2(\mathbb{R})$ und $\varphi^{(k)} \not\equiv 0$.
Dann ist $\psi := \varphi^{(k)}$ ein Wavelet.

b) Es sei $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$ und $0 < \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$ für ein $\beta > \frac{1}{2}$. Dann ist ψ ein Wavelet.

c) Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine Funktion mit kompaktem Träger supp $\psi \neq \emptyset$.
Dann ist ψ ein Wavelet gdw. $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$.

Beweis:

a) Nach Satz 1.2c) gilt im Fall $\varphi, \varphi^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$:

$$|\widehat{\varphi^{(k)}}(\omega)| = |\omega|^k |\hat{\varphi}(\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Die Erweiterung dieser Formel auf den Fall $\varphi, \varphi^{(k)} \in L_2(\mathbb{R})$ erfolgt wieder durch geeignete Limesbetrachtungen.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow C_\psi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega|^{2k} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\
&= \int_{-1}^{1} |\omega|^{2k-1} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega + \int_{|\omega|\geq 1} \frac{|\widehat{\varphi^{(k)}}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\
&\leq \|\hat{\varphi}\|_2^2 + \|\widehat{\varphi^{(k)}}\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi^{(k)}\|_2^2 < \infty
\end{aligned}$$

b) O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ gilt. Deshalb gilt $(1+|x|)^\beta \leq 1 + |x|^\beta, \forall x \in \mathbb{R}$, und die Funktion $(1+|\cdot|)^\beta |\psi(\cdot)|$ gehört zu $L_1(\mathbb{R})$.
Wir betrachten die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \Phi(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$.
Φ ist fast überall differenzierbar und es gilt $\Phi' = \psi$.
Für $x \leq 0$ gilt außerdem die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\Phi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x} (1+|t|)^{-\beta} (1+|t|)^\beta |\psi(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^\beta |\psi(t)| dt
\end{aligned}$$

Für $x > 0$ gilt wegen $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$ auch $\Phi(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} \psi(t)dt$ und deshalb

$$\begin{aligned}
|\Phi(x)| \leq \int_{x}^{\infty} |\psi(t)| dt &\leq \int_{x}^{\infty} \frac{(1+|t|)^\beta}{(1+|x|)^\beta} |\psi(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{(1+|x|)^\beta} \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^\beta |\psi(t)| dt
\end{aligned}$$

Also gilt $|\Phi(x)|^2 \leq$ const $\frac{1}{1+|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$.
Da auch $\Phi' = \psi \in L_2(\mathbb{R})$ gilt, läßt sich Teil a) anwenden, der richtig bleibt (insbesondere bereits 1.2c)), falls Φ (nur) fast überall differenzierbar ist.

c) Hat ψ einen kompakten Träger, so gilt $\psi \in L_1(\mathbb{R})$.
Deshalb folgt die Richtung ($\Rightarrow$) aus Eigenschaften 2.3a).
Die andere Richtung ($\Leftarrow$) der Aussage folgt aber aus b), da dann das Integral $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx$ für alle $\beta \geq 0$ endlich ist. $\square$

Beispiel 2.5

a) Haar-Wavelet:

$$\psi_H(x). = \begin{cases} 1 & , \ x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , \ x \in [\frac{1}{2}, 1) \quad \textit{(vgl. Bsp. 0.1)} \\ 0 & , \ \textit{sonst} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \psi_H \in L_2(\mathbb{R})$ *mit* $\|\psi_H\|_2 = 1$, *supp* $\psi_H = [0,1], \int_{\mathbb{R}} \psi_H(x)dx = 0$
$\rightsquigarrow$ *nach Satz 2.4c):* ψ_H *ist ein Wavelet.*

b) *Sombrero-Funktion:*

$$\left.\begin{array}{rcl} \psi_S(x) & := & (1-x^2)\exp(-\frac{x^2}{2}) \\ & = & -\frac{d^2}{dx^2}\exp(-\frac{x^2}{2}) \end{array}\right\} \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ *für* $\varphi(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2}), \forall x \in \mathbb{R}$, *und* $\varphi'' \in L_2(\mathbb{R})$ *folgt aus Satz 2.4a), daß* $\psi_S = \varphi''$ *ein Wavelet ist.*

c) *Es seien* $\psi_i \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, *Wavelets und wir definieren eine Funktion* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(x_i) \quad (\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ *ein Wavelet, denn es gilt*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^k dx & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(x_i|^k dx_i = \prod_{i=1}^{n} \|\psi_i\|_k^k < \infty \quad (k = 1, 2) \\ \hat{\psi}(\omega) & = & \displaystyle(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-i\langle\omega, x\rangle\right)\psi(x)dx \\ & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\omega_i x_i\right)\psi_i(x_i)dx_i \\ & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \hat{\psi}_i(\omega_i) \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}^n) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} C_\psi & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \le \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_1(\omega_1)|^2}{|\omega_1|} d\omega_1 \prod_{i=2}^{n} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}_i(\omega_i|^2 d\omega_i \\ & = & \displaystyle C_{\psi_1} \prod_{i=2}^{n} \|\hat{\psi}_i\|_2^2 = C_{\psi_1} \prod_{i=2}^{n} \|\psi_i\|_2^2 < \infty. \end{array}$$

3 Die Wavelet-Tranformation

Definition 3.1
Für jedes Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *ist die (kontinuierliche)* *<u>Wavelet-Transformation</u>* W_ψ *auf* $L_2(\mathbb{R}^n)$ *definiert durch*

$$(W_\psi f)(b, a) := \left(\prod_{i=1}^{n} |a_i| C_\psi\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \ldots, t_n) \overline{\psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \ldots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right)} dt_1 \cdots dt_n$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, *und* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, *wobei* C_ψ *die Zulässigkeits-Konstante von* ψ *aus Definition 2.1 ist.*

Bemerkung 3.2
Führt man für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\prod_{i=1}^n a_i \neq 0$, die Bezeichnung

$$\psi_{b,a}(t) := \left|\prod_{i=1}^n a_i\right|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \ldots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right), \quad (\forall t \in \mathbb{R}^n),$$

ein, so läßt sich die Wavelet-Transformation kürzer wie folgt beschreiben:

$$(W_\psi f)(b,a) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle f, \psi_{b,a} \rangle, \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \prod_{i=1}^n a_i \neq 0, \forall f \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Für die eingangs des Kap. 2 eingeführte Funktionenfamilie $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ für $n = 1$ entsteht dann mit Hilfe der Wavelet-Transformation

$$(*) \qquad (W_\psi f)(k2^j, 2^j) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R})\ \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

In Analogie zu den Fourier-Koeffizienten werden die $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ Wavelet-Koeffizienten genannt. Die Relation (*) entspricht der (inversen) diskreten Fourier-Tranformation.

Als nächstes Ziel leiten wir im Fall $n = 1$ eine „Isometrie“-Eigenschaft der Wavelet-Tranformation her, die eine Analogie zu Satz 1.11 darstellt, und wir rekonstruieren eine Funktion aus ihrer Wavelet-Transformierten (als Entsprechung für Satz 1.7).
Dabei bietet sich natürlicherweise an, $W_\psi f(\cdot, \cdot)$ als Funktion auf $\mathbb{R}^2_* := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ (um $a = 0$ auszuschließen) zu verstehen und $f \mapsto W_\psi f$ als Abbildung von $L_2(\mathbb{R})$ in einem L_2-Raum auf $\mathbb{R}^2_*$ aufzufassen, wobei bei letzterem das Maß so gewählt wird, daß es geeignete Eigenschaften auf $\mathbb{R}^2_*$ besitzt (vgl. auch Blatter, Kap. 3.2).

Satz 3.3
Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet und W_ψ die zugehörige Wavelet-Tranformation. Dann ist die Abbildung $W_\psi : L_2(\mathbb{R}) \to L_2\left(\mathbb{R}^2_*, \frac{1}{a^2} da\, db\right)$ injektiv und es gilt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} (W_\psi f)(b,a) \overline{(W_\psi g)(b,a)} \tfrac{1}{a^2} da\ db \\ &= \langle W_\psi f, W_\psi g \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2_*, \frac{1}{a^2} da\, db)}, \forall f, g \in L_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Hierbei ist C_ψ wieder die Zulässigkeits-Konstante aus Definition 2.1.

Beweis:
Wir beginnen mit einigen nützlichen Schlußfolgerungen aus Satz 1.11:

$$(W_\psi f)(b,a) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{b,a} \right\rangle$$

$$\overline{(W_\psi f)(b,a)} = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \langle \psi_{b,a}, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \left\langle \hat{\psi}_{b,a}, \hat{g} \right\rangle$$

für beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{array}{rcl} \hat{\psi}_{b,a}(\omega) & = & (2\pi|a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ & = & a(2\pi|a|)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega(ax+b))\psi(x)dx \\ & = & a(2\pi|a|)^{-\frac{1}{2}} \exp(-i\omega b)\hat{\psi}(a\omega) \end{array}$$

Damit erhalten wir zunächst für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}}[(W_\psi f)(b,a)\overline{W_\psi g)(b,a)}]db = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{b,a} \right\rangle \left\langle \hat{\psi}_{b,a}, \hat{g} \right\rangle db \\ = \frac{|a|}{2\pi C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \exp(ixb)\overline{\hat{\psi}(ax)}dx \int_{\mathbb{R}} \exp(-iyb)\hat{\psi}(ay)\overline{\hat{g}(y)}dy \right\} db \\ = \frac{|a|}{2\pi C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \overline{\int_{\mathbb{R}} \exp(-ixb)\hat{\psi}(ax)\overline{\hat{f}(x)}dx} \int_{\mathbb{R}} \exp(-iyb)\hat{\psi}(ay)\overline{\hat{g}(y)}dy \right\} db \\ = \frac{|a|}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{F}(b)}\hat{G}(b)db = \frac{|a|}{C_\psi} \left\langle \hat{G}, \hat{F} \right\rangle = \frac{|a|}{C_\psi} \langle G, F \rangle \end{array}$$

wobei $F(x) = \hat{\psi}(ax)\overline{\hat{f}(x)}$ und $G(y) := \hat{\psi}(ay)\overline{\hat{g}(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}$, und für die letzte Identität wieder Satz 1.11 benutzt wurde. Also folgt:

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}}[(W_\psi f)(b,a)\overline{(W_\psi g)(b,a)}]\frac{1}{a^2}da\,db & = & \frac{1}{|a|C_\psi} \langle G, F \rangle \\ & = & \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}|\hat{\psi}(ax)|^2 dx \right\} da \\ & = & \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(ax)|^2}{|a|} da\ dx \\ & = & \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega\, dx \\ & = & \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = \langle f, g \rangle\,. \end{array}$$

Für $f = g$ folgt daraus insbesondere die Injektivität von W_ψ als Abbildung von $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R}^2_*, \frac{1}{a^2}da\,db)$. □

Satz 3.4
Es sei $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet, das fast überall stetig ist, und W_ψ die zugehörige Wavelet-Tranformation. Dann gilt für jedes $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ und jeden Stetigkeitspunkt x von f

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(b,a)\psi_{b,a}(x)\frac{1}{a^2}da\,db,$$

wobei $\psi_{b,a}$ wie in Bemerkung 3.2 definiert ist.

Beweis:
Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ und x ein Stetigkeitspunkt von f. Wir verwenden wieder die „Gaußschen“ Funktionen e_α aus Lemma 1.6 und betrachten

$$\langle f, e_\alpha(\cdot - x) \rangle = f * e_\alpha(x)$$

Dann folgt aus Lemma 1.6 und Satz 3.3 bzw. Bemerkung 3.2:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \lim\limits_{\alpha \to 0+} \langle f, e_\alpha(\cdot - x) \rangle \\ & = & \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \lim\limits_{\alpha \to 0+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(b,a)\overline{\langle e_\alpha(\cdot - x), \psi_{b,a} \rangle} \frac{1}{a^2}da\,db \\ & = & \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \lim\limits_{\alpha \to 0+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(b,a)\langle \psi_{b,a}, e_\alpha(\cdot - x) \rangle \frac{1}{a^2}da\,db. \end{array}$$

Da ψ fast überall stetig ist, ist $\psi_{b,a(\cdot)} = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{\cdot-b}{a}\right)$ für fast alle a, b in x stetig. Also gilt für fast alle $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$\lim_{\alpha\to 0+} \langle \psi_{b,a}, e_\alpha(\cdot - x)\rangle = \psi_{b,a}(x) \qquad \text{(Lemma 1.6)}$$

Damit und dem Lebesgueschen Satz wird das Resultat plausibel. Allerdings erfordert die Vertauschung von Integral und Limes noch eine diffizile Argumentation, wofür auf Proposition 2.4.2 in Daubechies 1992 verweisen wird. □

Bemerkung 3.5
Die Bildmenge von W_ψ ist eine echte Teilmenge von $L_2(\mathbb{R}^2_*, \frac{1}{a^2} da\, db)$ da die Bilder wegen

$$W_\psi(b,a) \leq C_\psi^{-\frac{1}{2}}\|f\|_2\|\psi_{b,a}\|_2 = C_\psi^{-\frac{1}{2}}\|f\|_2\|\psi\|_2$$

beschränkt bzgl. $b, a \in \mathbb{R}$ sind. Uns interessieren nun die asymptotischen Eigenschaften der Funktion

$$(b,a) \mapsto (W_\psi f)(b,a) \text{ für } a \to 0.$$

Hintergrund dafür ist, daß in den zu $|a| \ll 1$ gehörenden Werten von $W_\psi f$ Informationen über die hochfrequenten bzw. kurzlebigen Anteile von f gespeichert sind. Würde nun $(W_\psi(b,a)$ für $a \to 0$ „schnell“ abklingen, sind diese Informationen nicht so wichtig, um das Signal f aus den Wavelet-Koeffizienten $(W_\psi f)(k2^j, 2^j) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}}(f, \psi_{j,k})$ rekonstruieren zu können, d.h., die Wavelet-Koeffizienten mit $j \to -\infty$ wären nicht wesentlich und bräuchten nicht gespeichert zu werden.

Definition 3.6
Man sagt, ein Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ hat die Ordnung $N \in \mathbb{N}$, falls

$$\int_{\mathbb{R}} |t^N||\psi(t)|dt < \infty\,, \quad \int_{\mathbb{R}} t^k\psi(t)dt = 0, k = 0, \ldots, N-1, \text{ und } 0 \neq \int_{\mathbb{R}} t^N\psi(t)dt.$$

Klar ist, daß jedes Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} |t||\psi(t)dt < \infty$ die Ordnung $N \geq 1$ hat. Für das Haar-Wavelet ψ_H gilt wegen

$$\int_{\mathbb{R}} t\psi_H(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t\; dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{4} \neq 0,$$

daß $N = 1$ ist.

Folgerung 3.7 *Ist $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet der Ordnung $N \in \mathbb{N}$, so ist $\hat{\psi}$ N-mal stetig differenzierbar und es gilt $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ für $k = 0, \ldots, N-1$ sowie $\hat{\psi}^{(N)}(0) \neq 0$.*

<u>Beweis:</u>
Der erste Teil der Aussage und die Formel

$$\hat{\psi}^{(k)}(\omega) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega x)x^k\psi(x)dx \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$

folgen aus Satz 1.2c). Daraus ergibt sich

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx$$

und die Aussage wegen Definition 3.6. $\square$

Satz 3.8
Es sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein Wavelet der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ und es gelte $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap C^r(\mathbb{R})$ für $0 \le r < N$ mit $f^{(r)}$ Lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$|(W_\psi f)(b,a)| \le C|a|^{r+\frac{3}{2}}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Beweis:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ beliebig gewählt. Nach dem Taylorschen Satz existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein $\tau \in [t,b] := \{\gamma t + (1-\gamma)b : \gamma \in [0,1]\}$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{r-1} \tfrac{f^{(k)}(b)}{k!}(t-b)^k + \tfrac{f^{(r)}(\tau)}{r!}(t-b)^r \\ &= \sum_{k=0}^{r} \tfrac{f^{(k)}(b)}{k!}(t-b)^k + \tfrac{1}{r!}(f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b))(t-b)^r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (W_\psi f)(b,a) &= (|a|C_\psi)^{-\frac{1}{2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= (|a|C_\psi)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{r} \tfrac{f^{(k)}(b)}{k!} \textstyle\int_{\mathbb{R}} (t-b)^k \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right. \\ &\quad \left. + \tfrac{1}{r!} \textstyle\int_{\mathbb{R}} (f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b))(t-b)^r \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right\} \\ \stackrel{(3.8!)}{=} &\ \tfrac{(|a|C_\psi)^{-\frac{1}{2}}}{r!} \textstyle\int_{\mathbb{R}} (f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b))(t-b)^r \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ \rightsquigarrow |(W_\psi f)(b,a)| &\le \tfrac{(|a|C_\psi)^{-\frac{1}{2}}}{r!} \textstyle\int_{\mathbb{R}} |f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(b)| |t-b|^r \left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| dt \\ &\le \tfrac{(|a|C_\psi)^{-\frac{1}{2}}}{r!} \textstyle\int_{\mathbb{R}} L|t-b|^{r+1} \left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| dt \end{aligned}$$

wobei L die Lipschitzkonstante von $f^{(r)}$ bezeichnet und $|\tau - b| \le |t-b|$ verwendet wurde. Mit der Substitution $t = b + as$ folgt dann

$$|(W_\psi f)(b,a)| \le \frac{L}{\sqrt{C_\psi} r!} |a|^{r+\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} |s|^{r+1} |\psi(s)| ds,$$

wobei das Integral wegen $r + 1 \le N$ und unserer Voraussetzung über ψ endlich ist. $\square$

Es lohnt sich also, die Ordnung des Wavelets ψ möglichst hoch anzusetzen und nach geeigneteren Mutter-Wavelets als ψ_H zu suchen.

4 Orthogonale Wavelets und Multiskalen-Analyse

Mit $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ betrachten wir wieder die Funktionenfamilie $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, d.h.,

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k), \forall x \in \mathbb{R}, \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Definition 4.1
$\psi \in L_2(\mathbb{R})$ heißt orthogonales Wavelet, falls die Familie $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ ist, d. h. falls $\langle\psi_{j,k}, \psi_{\ell,m}\rangle = \delta_{j\ell}\delta_{km}, \forall j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}$, und aus $\langle f, \psi_{j,k}\rangle = 0, \forall j, k \in \mathbb{Z}$, folgt $f = \Theta$.

Beispiel 4.2 *(Haar-Wavelet)*
Wir betrachten das Haar-Wavelet $\psi_H(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$
und erzeugen damit die Familie $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$. Es gilt

$$\langle\psi_{j,k}, \psi_{\ell,m}\rangle = 2^{-\frac{j+\ell}{2}} \left\{ \int_{k2^j}^{(k+\frac{1}{2})2^j} \overline{\psi_H(2^{-\ell}x - m)}dx - \int_{(k+\frac{1}{2})2^j}^{(k+1)2^j} \overline{\psi_H(2^{-\ell}x - m)}dx \right\}.$$

1. Fall:
$j = \ell$: $\langle\psi_{j,k}, \psi_{j,m}\rangle = 0$ für $k \neq m$, da für die Träger der Funktionen gilt:

$$\text{supp } \psi_{j,k} \cap \text{supp } \psi_{j,m} = [k2^j, (k+1)2^j) \cap [m2^j, (m+1)2^j) = \emptyset.$$

2. Fall:
$j < \ell$: $\psi_H(2^{-\ell} \cdot - m)$ ist dann auf dem Träger $[k2^j, (k+1)2^j)$ von $\psi_{j,k}$ konstant (gleich 1,0 oder -1) und deshalb folgt

$$\langle\psi_{j,k}, \psi_{\ell,m}\rangle = 0\,.$$

(Differenz zweier Integrale mit gleichem konstanten Integranden und gleicher Intervalllänge).
Also ist das System $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormiert. Die Vollständigkeit des Systems sieht man wie folgt ein: Die lineare Hülle dieses Systems enthält alle stückweise konstanten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Sprüngen in einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$. Diese sind aber dicht in $L_2(\mathbb{R})$ (da dies für Funktionen auf beschränkten Intervallen klar ist und Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ durch solche, die quadratisch integrierbar sind und einen beschränkten Träger haben, approximierbar sind).
Damit gilt, daß span $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ ist, d.h., die Vollständigkeit.

Bemerkung: (Paradoxon)
Erfüllt ψ die Mittelwerts-Bedingung $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$, so gilt dies auch für alle $\psi_{j,k}$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) und ihre Linearkombinationen. Deshalb denkt man auf den ersten Blick, daß man mit Fourierreihen bzgl. des Orthonormalsystems $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ nur Funktionen $f \in L_2(\mathbb{R})$

approximieren kann, für die auch $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$ gilt.
Dies ist aber nicht richtig, da das lineare Funktional F

$$F(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

zwar stetig auf $L_1(\mathbb{R})$ ist, aber auf $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ zwar wohldefiniert und linear ist, aber bzgl. der Norm in $L_2(\mathbb{R})$ nicht stetig ! Folglich müssen Grenzwerte (im Sinne von $L_2(\mathbb{R})$) keineswegs Mittelwert 0 besitzen, obwohl alle Folgenelemente dies erfüllen. Für eine detalliertere Argumentation anhand des Beispiels einer Funktion f mit $supp(f) = [0,1)$ und $f(x) = 1$, $\forall x \in [0,1)$, sei auf Blatter, Kap. 1.6, verwiesen.

Satz 4.3
Ist $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein orthogonales Wavelet, so gilt für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Überdies ist ψ ein Wavelet mit $C_\psi = \frac{1}{\pi}\log 2$.

Beweis:
Den ersten Teil der Aussage beweisen wir hier nicht. Wir berechnen aber die Zulässigkeitskonstante C_ψ. Es gilt

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega.$$

Für das erste Integral gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \qquad \text{(Subst.: } \omega = 2^{-j}u\text{)} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_1^2 \frac{|\hat{\psi}(2^{-j}u)|^2}{u} du = \int_1^2 \frac{1}{u} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}u)|^2 du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2\pi}\log 2.
\end{aligned}$$

Analoges gilt für das andere Integral, d.h. $C_\psi = \frac{1}{\pi}\log 2$. □

Es sei nun $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein orthogonales Wavelet und wir betrachten

$$V_j := \text{cl span } \{\psi_{i,k} : i,k \in \mathbb{Z}, i \geq j+1\}, \ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Dann hat die Familie der abgeschlossenen Teilräume $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ von $L_2(\mathbb{R})$ die folgenden Eigenschaften.

Satz 4.4 *(Multiskalen-Analyse)*
Es sei $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ wie oben definiert. Dann gilt:

(1) $V_j \subseteq V_{j-1} \subseteq L_2(\mathbb{R}),\ \forall j \in \mathbb{Z}$;

(2) $cl \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j \right) = L_2(\mathbb{R})$;

(3) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(4) $f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$.

Überdies gilt für die Räume $W_j := cl\ span\ \{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, daß

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z},\ \textit{und}\ \ L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j.$$

Hierbei bedeutet $\oplus$ das Zeichen für die orthogonale Summe.

Beweis:

(1) und die Darstellung $V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$, folgen nach Definition von V_j und W_j und aus der Tatsache, daß ψ ein orthogonales Wavelet ist.

(2) folgt auch aus der letzteren Tatsache.

(3) Nach Definition gilt für beliebige $j \in \mathbb{Z}$ und beliebige $f \in V_j$, daß

$$(*) \qquad f = \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{i,k}\rangle \psi_{i,k}.$$

Gilt nun $f \in \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ und ist $j \in \mathbb{Z}$ beliebig gewählt, so gilt $f \in V_j$ und $f \in V_{j-1}$, d. h., $f \perp W_j \rightsquigarrow \langle f, \psi_{j,k}\rangle = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.
Da dies für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt, folgt aus (*) $f = 0$.

(4) Es sei $f(\cdot) \in V_j$. Aus (*) folgt

$$\begin{aligned}
f(2\cdot) &= \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{i,k}\rangle \psi_{i,k}(2\cdot) \\
&= \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{i,k}\rangle 2^{-\frac{i}{2}} \psi(2^{-i}2\cdot -k) \\
&= \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\frac{1}{2}} \langle f, \psi_{i,k}\rangle 2^{-\frac{i-1}{2}} \psi(2^{-(i-1)}\cdot -k) \\
&= \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\frac{1}{2}} \langle f, \psi_{i,k}\rangle \psi_{i-1,k}(\cdot) \\
&= \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\frac{1}{2}} \langle f, \psi_{i+1,k}\rangle \psi_{i,k}(\cdot) \in V_{j-1}
\end{aligned}$$

Analog $f\left(\frac{1}{2}\cdot\right) \in V_{j+1}$ und damit die Umkehrung.
Die Orthogonalität der $W_j, j \in \mathbb{Z}$, folgt aus der von ψ und die Aussage
$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = L_2(\mathbb{R})$ aus (2). $\square$

Definition 4.5
Eine Familie $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *von abgeschlossenen linearen Teilräumen von* $L_2(\mathbb{R})$ *heißt* *Multiskalen-Analyse (MSA), falls sie die Eigenschaften (1) - (4) in Satz 4.4 erfüllt.* *Eine Funktion* $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ *heißt Skalierungsfunktion der MSA, falls* $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *eine orthonormierte Basis von* V_0 *ist.*

Folgerung 4.6
Ist $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *eine Multiskalen-Analyse von* $L_2(\mathbb{R})$ *und* Φ *eine Skalierungsfunktion derselben, so ist das System* $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ *mit*

$$\Phi_{j,k}(t) := 2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^{-j}t - k),\ k \in \mathbb{Z},$$

für jedes $j \in \mathbb{Z}$ *eine orthonormierte Basis von* V_j.
Die orthogonale Projektion P_j *von* $L_2(\mathbb{R})$ *auf* V_j *hat die Gestalt*

$$P_j f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Phi_{j,k}\rangle \Phi_{j,k}, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

und es gilt $\lim\limits_{j\to-\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$ *und* $\lim\limits_{j\to\infty} \|P_j f\|_2 = 0$ *für alle* $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Beweis:
Aus (4) folgt zunächst $\Phi_{j,k} \in V_j,\ \forall k, j \in \mathbb{Z}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j,k}, \Phi_{j,\ell}\rangle &= 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \Phi(2^{-j}t - k)\overline{\Phi(2^{-j}t - \ell)}dt \quad (\text{Subst.: } u = 2^{-j}t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(u - k)\overline{\Phi(u - \ell)}du = \delta_{k\ell} \end{aligned}$$

da Φ eine Skalierungsfunktion ist. Also ist $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ für jedes $j \in \mathbb{Z}$ orthonormiert. Das Orthonormalsystem ist auch vollständig, da aus $f \in V_j$ und $\langle f, \Phi_{j,k}\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, folgt

$$\langle f(2^j\cdot), \Phi(\cdot - k)\rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

und deshalb $f(2^j\cdot) = 0$ gilt, da Φ eine Skalierungsfunktion ist.
Also gilt für jedes $f \in V_j$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \Phi_{j,k}\rangle \Phi_{j,k} \\ \rightsquigarrow P_j f &= \sum_{k=\in\mathbb{Z}} \langle P_j f, \Phi_{j,k}\rangle \Phi_{j,k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \Phi_{j,k}\rangle \Phi_{j,k}\,,\ \forall f \in L_2(\mathbb{R})\ \forall j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen folgen dann aus den Eigenschaften (2) und (3). □

Da für eine Skalierungsfunktion Φ gelten muß, daß $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ ist, benötigen wir im folgenden für diese Eigenschaft ein Kriterium.

Lemma 4.7
Für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ *bildet das System* $\{f(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *ein Orthonormalsystem in* $L_2(\mathbb{R})$ *gdw. die Gleichung*

$$F(\omega) := \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ *gültig ist.*

Beweis:
Wir setzen $f_k(x) := f(x-k),\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{Z}$, und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle f_k, f_j\rangle &= \langle \hat{f}_k, \hat{f}_j\rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_k(\omega)\overline{\hat{f}_j(\omega)}d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-ik\omega)\hat{f}(\omega)\overline{\exp(-ij\omega)\hat{f}(\omega)}d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-i(k-j)\omega)|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi\ell}^{2\pi(\ell+1)} \exp(-i(k-j)\omega)|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \exp(-i(k-j)(u+2\pi\ell))|\hat{f}(u+2\pi\ell)|^2 du \\
&= \int_0^{2\pi} \exp(-i(k-j)u)F(u)du, \quad \forall k,j \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Das letztere Integral ist bis auf den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{2\pi}$ ein Fourierkoeffizient der 2π-periodischen Funktion F. Gilt also $\langle f_k, f_j\rangle = \delta_{kj}$, so auch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\exp(-i(k-j)u)du = \frac{1}{2\pi}\delta_{kj}$$

und umgekehrt. Diese Fourierkoeffizienten hat aber gerade die Funktion

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi},\ \forall\omega \in \mathbb{R}\,. \qquad \Box$$

Satz 4.8
Jede Skalierungsfunktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ einer MSA $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ genügt einer Skalierungsgleichung, d.h., es existiert eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{C})$ mit $\Phi = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\Phi(2\cdot -k)$.
Die Fourier-Transformierte $\hat{\Phi}$ von Φ genügt der Funktionalgleichung

$$\hat{\Phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \textit{für fast alle } \omega \in \mathbb{R},$$

wobei $H(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\cdot)$ die erzeugende Funktion der MSA ist. Für die erzeugende Funktion $H(\cdot)$ gilt:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1 \qquad \textit{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis:
Nach Folgerung 4.6 ist $\{\sqrt{2}\Phi(2\cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von V_{-1}. Wegen $\Phi \in V_0 \subseteq V_{-1}$ muß gelten

$$\Phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \Phi, \sqrt{2}\Phi(2\cdot -k)\rangle\sqrt{2}\Phi(2\cdot -k) \quad (\text{in } L_2(\mathbb{R})).$$

Mit $h_k := \sqrt{2}\langle\Phi, \Phi(2\cdot -k)\rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, folgt daraus die Skalierungsgleichung.
Überdies folgt aus der Parseval'schen Gleichung, daß

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty,\ \text{d. h. } (h_k) \in \ell_2(\mathbb{C}).$$

Mit der Fourier-Transformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\omega) &= \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} h_k \mathcal{F}(\Phi(2\cdot -k))(\omega) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \exp\left(-\tfrac{ik\omega}{2}\right)(\mathcal{F}\Phi)\left(\tfrac{\omega}{2}\right) = H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$, da trigonometrische Fourierreihen fast überall konvergieren (Blatter, Aussage (2.4)). Da $\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem bildet, muß nach Lemma 4.7 gelten:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\Phi}(\omega + 2\pi\ell)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Teilt man in der letzten Reihe die Summanden mit geraden und ungeraden ℓ auf, so entsteht mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\pi} &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\Phi}(\omega + 2\pi\cdot 2\ell)\right|^2 + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\Phi}(\omega + 2\pi(2\ell+1))\right|^2 \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\Phi}(\omega + 4\pi\ell)\right|^2 + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\Phi}(\omega + 2\pi + 4\pi\ell)\right|^2 \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|H\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right)\right|^2 \left|\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right)\right|^2 \\ &\quad + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|H\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right)\right|^2 \left|\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right)\right|^2 \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left(\left|H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right)\right|^2 + \left|H\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi\right)\right|^2 \left|\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right)\right|^2\right) \\ &= \left(\left|H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right|^2 + \left|H\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi\right)\right|^2\right) \tfrac{1}{2\pi} \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.9 *(Haar-MSA)*
Gemäß Satz 4.4 erzeugt auch das Haar-Wavelet eine MSA $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Für diese gilt insbesondere

$$\begin{aligned}V_0 &= cl\ span\ \{\psi_H(2^{-i}\cdot -k) : i \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f \text{ ist konstant auf } [k, k+1[,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Deshalb ist $\Phi = \chi_{[0,1)}$, d.h., die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1)$, eine Skalierungsfunktion, da gilt

$$V_0 = cl\ span\ \{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} = cl\ span\ \{\chi_{[k,k+1)} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aus $\chi_{[0,1)} = \chi_{[0,\frac{1}{2})} + \chi_{[\frac{1}{2},1)}$ folgt die Gleichung

$$\Phi = \Phi(2\cdot) + \Phi(2\cdot -1) \qquad \textit{(Skalierungsgleichung).}$$

D.h. $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $h_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$.
Die erzeugende Funktion ist $H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + \exp(-i\omega))$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, und es gilt
$\hat{\Phi}(\omega) = \mathcal{F}\left(\chi_{[0,1)}\right) = \int_0^1 \exp(-i\omega x)dx = \frac{1}{i\omega}(1 - \exp(-i\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.
Man verifiziert problemlos die Eigenschaften aus 4.8.

Glücklicherweise gilt die Tatsache, daß nur endlich viele h_k von 0 verschieden sind, auch für allgemeine Skalierungsfunktionen Φ mit kompaktem Träger.

Satz 4.10
Die Skalierungsfunktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ einer MSA besitze einen kompakten Träger und es sei $a := \inf\ \operatorname{supp} \Phi$ und $b := \sup\ \operatorname{supp} \Phi$, wobei $\operatorname{supp} \Phi := cl\ \{x \in \mathbb{R} : \Phi(x) \neq 0\}$.
Dann gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ und $h_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus [a, b]$.

Beweis:
Wir verwenden die Bezeichnung $\Phi_{-1,k} := \sqrt{2}\, \Phi(2 \cdot -k)$ und wissen nach Satz 4.8, daß

$$\Phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \Phi_{-1,k}.$$

Außerdem gilt nach Definition von a bzw. b, daß

$$\begin{aligned} \inf\{x \in \mathbb{R} : \Phi_{-1,k} \neq 0\} &= \tfrac{1}{2}(a+k) \quad \text{und} \\ \sup\{x \in \mathbb{R} : \Phi_{-1,k} \neq o\} &= \tfrac{1}{2}(b+k). \end{aligned}$$

Wegen $\langle \Phi, \Phi_{-1,\ell} \rangle = h_\ell \|\Phi_{-1,\ell}\|^2 = h_\ell$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, ist h_ℓ höchstens dann verschieden von 0, wenn $\operatorname{supp}\ \Phi \cap \operatorname{supp}\ \Phi_{-1\ell} \neq \emptyset$. Da beide Träger beschränkt sind, kann h_ℓ höchstens für endlich viele ℓ verschieden von 0 sein. Wir setzen

$$-\infty < k_{\min} := \min\{k \in \mathbb{Z} : h_k \neq 0\} < k_{\max} := \max\{k \in \mathbb{Z} : h_k \neq 0\} < \infty.$$

Aus der Darstellung

$$\Phi = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} h_k \Phi_{-1,k}$$

folgt $a = \inf\ \operatorname{supp}\ \Phi_{-1,k_{\min}} = \frac{1}{2}(a + k_{\min})$ und $b = \sup\ \operatorname{supp}\ \Phi_{-1,k_{\max}} = \frac{1}{2}(b + k_{\max})$.
Folglich gilt $a = k_{\min}$ und $b = k_{\max}$. □

Leider lassen sich die $\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ als orthonormierte Basis von $V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$, nicht zu einer großen orthonormierten Basis von $L_2(\mathbb{R})$ zusammenfassen. Deshalb konstruiert man ausgehend von einer MSA $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ Räume $(W_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ wie folgt:

Satz 4.11
Es sei $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine MSA von $L_2(\mathbb{R})$. Wir definieren Räume W_j so, daß $V_j \perp W_j$ und $V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $W_i \perp W_j, i \neq j$, und $L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$.

Beweis:
Ist $i > j$, so gilt $W_i \subseteq V_{i-1} \subset V_j$, d. h. $W_i \perp W_j$.
Die orthogonale Summe $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ ist also wohldefiniert. Zu zeigen bleibt:
$f \in L_2(\mathbb{R}), f \perp W_j, \forall j \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

Seien $\varepsilon > 0$ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ beliebig gewählt. Nach Eigenschaft (2) existiert ein $j_0 \in \mathbb{Z}$ und ein $v_0 \in V_{j_0}$ mit

$$\|f - v_0\| < \varepsilon.$$

Zu $v_0 \in V_{j_0}$ existieren $v_1 \in V_{j_0+1}$ und $w_1 \in W_{j_0+1}$ mit

$$v_0 = v_1 + w_1, \;\; v_1 \perp w_1.$$

Analog existieren $v_2 \in V_{j_0+2}, \;\; w_2 \in W_{j_0+2}$ mit

$$v_1 = v_2 + w_2, \;\; v_2 \perp w_2, \quad \text{usw.}$$

Wir setzen diesen Prozeß fort und erhalten

$$v_0 = v_n + \sum_{k=1}^{n} w_k, \;\; v_n \in V_{j_0+n}, \;\; w_k \in W_{j_0+k}, \;\; k = 1, \ldots, n.$$

Nach Konstruktion sind alle auf der rechten Seite stehenden Elemente orthogonal. Deshalb gilt:

$$\|v_0\|^2 = \|v_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|w_k\|^2, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $\sum\limits_{k=1}^{n} \|w_k\|^2 \leq \|v_0\|^2, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|w_k\|^2$ ist konvergent.
Somit konvergieren auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ über das Orthogonalsystem $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L_2(\mathbb{R})$ und die Folge (v_n) in $L_2(\mathbb{R})$. Es gilt $v_n \in V_{j_0+n} \subseteq V_j, \;\; \forall j \leq j_0 + n$, und

$$\lim_{n\to\infty} v_n =: v = v_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Mit $v_n \in \bigcap\limits_{j \leq j_0+n} V_j$, $\forall n \in \mathbb{N}$, folgt aber $v \in \bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ und nach Eigenschaft (3) einer MSA schließlich $v = 0$.
Damit erhalten wir

$$v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Setzt man nun voraus $f \perp w_k, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$, so folgt

$$\langle f, v_0 \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, w_k \rangle = 0 \text{ und deshalb } \|f\|^2 \leq \|f\|^2 + \|v_0\|^2 = \|f - v_0\|^2 < \varepsilon^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, muß $f = 0$ gelten. $\square$

Folgerung 4.12
Es sei $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine MSA von $L_2(\mathbb{R})$ und die Räume $(W_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ seien wie in Satz 4.10 definiert. Ist $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ so gewählt, daß $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_0 ist, so ist ψ ein orthogonales Wavelet und erzeugt die MSA $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$.

Beweis:
Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ läßt sich $v \in V_{j-1}$ eindeutig in der Form

$$v(\cdot) = u(\cdot) + w(\cdot), u \in V_j,\ w \in W_j,\ u \perp w,$$

darstellen. Deshalb und wegen (4) gilt auch

$$(*) \qquad v(2\cdot) = u(2\cdot) + w(2\cdot),\ v(2\cdot) \in V_{j-2}, u(2\cdot) \in V_{j-1}.$$

Da überdies $\langle u(2\cdot), w(2\cdot)\rangle = \frac{1}{2}\langle u, w\rangle = 0$ gilt, ist (*) gerade die orthogonale Zerlegung von $v(2\cdot)$. Es folgt, daß

$$w(2\cdot) \in W_{j-1}.$$

Die umgekehrte Richtung gilt analog und wir haben

$$w(\cdot) \in W_j \Leftrightarrow w(2\cdot) \in W_{j-1}.$$

Deshalb gilt für die in diesem Kapitel üblicherweise konstruierten Funktionen

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k),\ \forall j, k \in \mathbb{Z},$$

daß $\psi_{j,k} \in W_j,\ \forall j, k \in \mathbb{Z}$. Analog zu Folgerung 4.6 folgt, daß $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_j ist. Da nach Satz 4.10 aber die Räume $W_j, j \in \mathbb{Z}$, orthogonal sind und $L_2(\mathbb{R}) = \mathrm{cl} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ gilt, ist das gesamte System $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$. D.h. ψ ist ein orthogonales Wavelet. $\square$

Frage:
Gelingt es, Funktionen $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ zu konstruieren, so daß $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von W_0 ist, wobei $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$ und $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine MSA von $L_2(\mathbb{R})$ mit Skalierungsfunktion Φ und erzeugender Funktion H darstellt.

Da ψ_H eine solche Funktion darstellt, steht die Frage präziser so, daß ein allgemeines Prinzip zur Bestimmung solcher Funktionen ψ gesucht ist. Dazu benötigen wir zunächst eine Charakterisierung von W_0.

Lemma 4.13
Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ gehört zu W_0 gdw. eine 2π-periodische Funktion $\nu \in L_2[0, 2\pi]$ existiert, so daß

$$\hat{f}(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right)\nu(\omega)\overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \textit{fast überall in } \mathbb{R}.$$

Beweis:
Jedes $f \in V_{-1}$ besitzt die Darstellung

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \Phi_{-1,k}, \;\; f_k = \langle f, \Phi_{-1,k} \rangle, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{bzw.}$$

$$(*) \quad \hat{f}(\omega) = m_f\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ wobei } m_f(\omega) := \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(-ik\omega) \text{ f. ü.}$$

Jedes $f \in W_0 \subseteq V_{-1}$ hat die Eigenschaft $f \perp V_0$, d.h.

$$\begin{aligned}
0 = \langle f, \Phi_{0,k} \rangle &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\Phi}_{0,k}(\omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\Phi}(\omega)} \exp(ik\omega) d\omega \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi\ell}^{2\pi(\ell+1)} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\Phi}(\omega)} \exp(ik\omega) d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi\ell)\overline{\hat{\Phi}(\omega + 2\pi\ell)} \right) \exp(ik\omega) d\omega, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Es sind also alle Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion
$F(\omega) := \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2\pi\ell)\overline{\hat{\Phi}(\omega + 2\pi\ell)}, \omega \in \mathbb{R}$, gleich 0 und deshalb gilt $F(\omega) \equiv 0$ f. ü.
Daraus folgt analog zur Überlegung im Beweis von 4.7, daß

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 4\pi\ell)\overline{\hat{\Phi}(\omega + 4\pi\ell)} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi + 4\pi\ell)\overline{\hat{\Phi}(\omega + 2\pi + 4\pi\ell)} \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} m_f\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \overline{H\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right)} \; \overline{\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right)} \\
&\quad + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} m_f\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \overline{H\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right)} \; \overline{\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right)} \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left[m_f\left(\tfrac{\omega}{2}\right) \overline{H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)} \left| \hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \right|^2 + m_f\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi\right) \overline{H\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi\right)} \left| \hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \right|^2 \right] \\
&= \left(m_f\left(\tfrac{\omega}{2}\right) \overline{H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)} + m_f\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi\right) \overline{H\left(\tfrac{\omega}{2} + \pi\right)} \right) \cdot \tfrac{1}{2\pi} \quad \text{f.ü.}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Gleichung (*), die Funktionalgleichung für $\hat{\Phi}$ in Satz 4.8 und abschließnd Lemma 4.7 verwendet. Es gilt also die folgende Gleichung für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$:

$$m_f(\omega)\overline{H(\omega)} + m_f(\omega + \pi)\overline{H(\omega + \pi)} = 0.$$

Für fast alle ω stehen also die Elemente $(m_f(\omega), m_f(\omega + \pi))$ und $(H(\omega), H(\omega + \pi))$ des $\mathbb{C}^2$ aufeinander senkrecht in $\mathbb{C}^2$. Außerdem hat $\mathcal{H} := (H(\omega), H(\omega + \pi))$ die Norm 1 in $\mathbb{C}^2$ nach Satz 4.8.
Die Vektoren $\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}} := (\overline{H(\omega + \pi)}, -\overline{H(\omega)})$ bilden nun eine Orthognormalbasis von $\mathbb{C}^2$ und es muß

$$(**) \qquad (m_f(\omega), m_f(\omega + \pi)) = \lambda(\omega)\tilde{\mathcal{H}}$$

gelten, wobei $\lambda(\omega) = m_f(\omega)H(\omega + \pi) - m_f(\omega + \pi)H(\omega)$.
Für die Funktion $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ gilt

$$\lambda(\omega + \pi) = m_f(\omega + \pi)H(\omega) - m_f(\omega)H(\omega + \pi) = -\lambda(\omega) \quad \text{f.ü.}$$

Die Funktion $\nu(\omega) := \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)\exp(-i\frac{\omega}{2})$, $\forall\omega\in\mathbb{R}$, ist 2π-periodisch wegen

$$\begin{aligned}\nu(\omega+2\pi) &= \lambda\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi\right)\exp\left(-i\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi\right)\right)\\ &= -\lambda\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\exp(-i\tfrac{\omega}{2})\exp(-i\pi) = \nu(\omega) \quad \text{f.ü.}\end{aligned}$$

Aus (**) schlußfolgern wir deshalb

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{H(\omega+\pi)} = \exp(i\omega)\nu(2\omega)\overline{H(\omega+\pi)} \quad \text{f.ü.}$$

Setzen wir dies in (*) ein, erhalten wir die gewünschte Aussage, wobei noch zu zeigen bleibt, daß $\nu \in L_2[0,2\pi]$. Aus (**) und den Definitionen von ν und λ folgt

$$|\nu(\omega)|^2 = |\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 = \left|\left(m_f\left(\frac{\omega}{2}\right), m_f\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right)\right|^2 = \left|m_f\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 + \left|m_f\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 \quad \text{f.ü.}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\nu(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left|m_f\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 + \left|m_f\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\right)d\omega\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(|m_f(\omega)|^2 + |m_f(\omega+\pi)|^2\right)d\omega\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|m_f(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|f_k|^2 = \|f\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Für den Beweis der Umkehrung gehen wir aus von der Darstellung

$$\hat{f}(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right)\nu(\omega)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \text{f.ü.},$$

für die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von $f \in_2 (\mathbb{R})$ und zeigen, daß

$$f \in V_{-1} \text{ und } f \perp V_0.$$

Für die Funktion m mit $m(\omega) := \exp(i\omega)\nu(2\omega)\overline{H(\omega+\pi)}, \omega\in\mathbb{R}$, gilt

$$\hat{f}(\omega) = m\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ und } |m\left(\frac{\omega}{2}\right)| \le |\nu(\omega)|, \quad \text{f.ü.}$$

Es folgt $m \in L_2[0,2\pi]$ und m ist 2π-periodisch. Deshalb kann $m(\cdot)$ in eine trigonometrische Fourierreihe entwickelt werden. Wir schlußfolgern (siehe Anfang des Beiweises) $f \in V_{-1}$. Außerdem ergibt sich (zunächst für $\frac{\omega}{2}$ anstelle von ω)

$$(m(\omega), m(\omega+\pi)) = \exp(i\omega)\nu(2\omega)\tilde{\mathcal{H}} \perp \mathcal{H} = (\mathcal{H}(\omega), \mathcal{H}(\omega+\pi)) \text{ f.ü. bzw.}$$

$$m(\omega)\overline{H(\omega)} + m(\omega+\pi)\overline{H(\omega+\pi)} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber äquivalent zu $\langle f, \Phi_{0,k}\rangle = 0,\ \forall k\in\mathbb{Z}$, oder $f\perp V_0$. $\square$

Nach dieser Charakterisierung von W_0 kommt die Aussage unseres ersten Hauptergebnisses nicht mehr überraschend.

Satz 4.14
Es sei $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse von $L_2(\mathbb{R})$ mit Skalierungsfunktion Φ und erzeugender Funktion H. Eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),\ \forall\omega\in\mathbb{R}.$$

Dann ist ψ ein orthogonales Wavelet, das die MSA $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ erzeugt und die Form

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\overline{h_{-k-1}}\Phi(2t-k),\ f.\ \ddot{u}.,$$

besitzt.

Beweis:
Nach Folgerung 4.12 gengt es zu zeigen, daß das System $\{\psi(\cdot-k) : k\in\mathbb{Z}\}$ eine orthonormierte Basis von W_0 darstellt. Nach Lemma 4.13 gehören die Funktionen $\psi(\cdot-k)$ sämtlich zu W_0. Um zu zeigen, daß $\{\psi(\cdot-k) : k\in\mathbb{Z}\}$ orthonormiert ist, verwenden wir Lemma 4.7. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2\pi\ell)|^2 &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\omega+4\pi\ell)|^2+\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2\pi+4\pi\ell)|^2\\
&= \left|H\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2}+2\pi\ell\right)\right|^2\\
&\quad+\left|H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right|^2\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\Phi}\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi+2\pi\ell\right)\right|^2\\
&= \left(\left|H\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2+\left|H\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right|^2\right)\tfrac{1}{2\pi}=\tfrac{1}{2\pi}\qquad\text{f.ü.}
\end{aligned}$$

Dabei wurde Satz 4.8 und Lemma 4.7 mit $f=\Phi$ verwendet. Als nächstes zeigen wir, daß $\{\psi(\cdot-k) : k\in\mathbb{Z}\}$ den Raum W_0 aufspannt. Es sei $f\in W_0$ beliebig. Nach Lemma 4.13 existiert eine 2π-periodische Funktion $\nu\in L_2[0,2\pi]$, so daß

$$\hat{f}(\omega)=\nu(\omega)\hat{\psi}(\omega)\qquad\text{f. ü.}$$

Es sei $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k\exp(-ik\omega)$ die Fourierreihe von ν. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k\exp(-ik\omega)\hat{\psi}(\omega)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k\hat{\psi}_{0,k}(\omega)\qquad\text{f. ü.}
\end{aligned}$$

Also haben wir $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k\psi(\cdot-k)$, d.h., das gewünschte Resultat.
Schließlich bleibt die Gestalt von $\psi(\cdot)$ herzuleiten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(i\tfrac{\omega}{2})\overline{H\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi\right)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\bar{h}_k\exp\left(ik\left(\tfrac{\omega}{2}+\pi\right)\right)\exp\left(i\tfrac{\omega}{2}\right)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\bar{h}_k\exp\left(i(k+1)\tfrac{\omega}{2}\right)\qquad(\ell:=-k-1)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(-1)^{\ell-1}\overline{h_{-\ell-1}}\exp\left(-i\ell\tfrac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

und damit für $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\overline{h_{-k-1}}\,\frac{1}{2}\exp\left(-ik\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{f. ü.}$$

Dies ist aber die Fourier-Tranformierte der Funktion

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\overline{h_{-k-1}}\Phi(2t-k) \quad \text{f. ü.} \qquad \square$$

Beispiel 4.15 *(Haar-MSA)*

$$\Phi = \chi_{[0,1)}, \quad \hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{i\omega}(1-\exp(-i\omega)),\ \forall\omega\in\mathbb{R},$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(1+\exp(-i\omega)),\ \forall\omega\in\mathbb{R}, h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \textit{(vgl. Beispiel 4.9).}$$

Wir verwenden nun die Formel für ψ aus Satz 4.14 und erhalten

$$\psi(t) = \sqrt{2}(h_0\Phi(2t+1) - h_1\Phi(2t+2)) = \Phi(2t+1) - \Phi(2t+2) = -\psi_H(t+1).$$

D.h. man erhält nicht das Original-Haar-Wavelet, aber eine Funktion mit analogen Eigenschaften.

Abschließend bleibt als offene Frage stehen, welche Funktionen $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ mit der Festlegung $V_j := \operatorname{cl}\operatorname{span}\{\Phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $j \in \mathbb{Z}$, eine Multiskalen-Analyse mit den Eigenschaften (1) - (4) erzeugen.

Satz 4.16
Ist $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) $\exists C > 0$ *mit* $|\Phi(t)| \le \frac{C}{1+t^2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$;

(ii) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\omega+2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ *f. ü.;*

(iii) es existiert eine Folge $(h_k) \in \ell_2(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$\Phi(\cdot) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\Phi(2\cdot-k).$$

(iv) $\left|\int_{\mathbb{R}}\Phi(t)dt\right| = 1.$

Dann ist Φ eine Skalierungsfunktion der MSA $(V_j := \operatorname{cl}\operatorname{span}\{\Phi_{j,k} : k\in\mathbb{Z}\})_{j\in\mathbb{Z}}$.

Beweis:
Nach (ii) ist das System $\{\Phi_{0,k} = \Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ (Lemma 4.7). (iii) impliziert $V_0 \subset V_{-1}$ und allgemein $V_j \subseteq V_{j-1}$, d.h., die Eigenschaft (1) einer MSA. Die Eigenschaft (4) ist nach Definition der V_j, $j\in\mathbb{Z}$, klar.
Wir zeigen als nächstes: (i) $\Rightarrow$ (3), d.h., $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Aus (i) folgt $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\Phi(t-k)|^2 \le C_1^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, mit einer Konstanten $C_1 > 0$.
Deshalb gilt für jedes $f \in V_0 = \operatorname{cl}\operatorname{span}\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
|f(t)| &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \Phi(\cdot - k)\rangle||\Phi(t-k)| \\
&\le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \Phi(\cdot - k)\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Phi(t-k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C_1\|f\|_2 \\
\rightsquigarrow \|f\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \le C_1\|f\|_2\,,
\end{aligned}
$$

Sei $j \in \mathbb{Z}$ und $g \in V_j$. Dann gilt $f(\cdot) = g(2^j\cdot) \in V_0$.

$$\rightsquigarrow \|g\|_\infty = \|f\|_\infty \le C_1\|f\|_2 = C_1 2^{-\frac{j}{2}}\|g\|_2.$$

Für $g \in \bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ gilt $\|g\|_\infty \le C_1 2^{-\frac{j}{2}}\|g\|_2$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, und folglich $\|g\|_\infty = 0$, d.h., $g = 0$.

Abschließend bleibt zu zeigen: (iv) $\Rightarrow$ (2), d.h., $\operatorname{cl}\left(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j\right) = L_2(\mathbb{R})$.

Es sei $\tilde{V} = \operatorname{cl}\left(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j\right)$.

Nach Konstruktion ist $\tilde{V}$ invariant gegenüber ganzzahligen Translationen und Dilatationen mit $2^j, j \in \mathbb{Z}$. Alle Treppenfunktionen mit Sprungstellen in $\{2^j k : j, k \in \mathbb{Z}\}$ sind aber dicht in $L_2(\mathbb{R})$. Deswegen genügt es zu zeigen:
<u>Beh.:</u> $f := \chi_{[-1,1)} \in \tilde{V}$.
<u>Bew.:</u> $f \in \tilde{V}$ ist äquivalent zu $\lim\limits_{j\to-\infty} P_j f = f$ in $L_2(\mathbb{R})$, d.h.
$0 = \lim\limits_{j\to-\infty} \|f - P_j f\|_2^2 = \lim\limits_{j\to-\infty} (\|f\|_2^2 - \|P_j f\|_2^2) = \lim\limits_{j\to-\infty} (2 - \|P_j f\|_2^2)$.
Für fixiertes $j \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\|P_j f\|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \Phi_{j,k}\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-1}^{1} \overline{\Phi_{j,k}(t)}dt \right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \left| \int_{-1}^{1} \overline{\Phi(2^{-j}t - k)}dt \right|^2 = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-j}-k}^{2^{-j}-k} \Phi(u)du \right|^2.
\end{aligned}
$$

Um die Reihenglieder abzuschätzen, beginnen wir damit, daß wegen (i) für jedes $a > 0$ gilt:

$$(*) \qquad \int\limits_{|t|>a} |\Phi(t)|dt \le 2C \int\limits_a^\infty \frac{1}{t^2}dt = \frac{2C}{a}.$$

Es sei $M \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Da uns der Grenzwert $j \to -\infty$ interessiert, nehmen wir an, daß $N := 2^{-j} \ge M$. Wir unterscheiden dann die folgenden 3 Fälle für $k \in \mathbb{Z}$:

1) $|k| \le N-M \rightsquigarrow -N-k \le -M$ und $N-k \ge M$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{-N-k}^{N-k} \Phi(u)du\right| &\le \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u)du\right| + \left|\int\limits_{-\infty}^{-N-k} \Phi(u)du + \int\limits_{N-k}^{+\infty} \Phi(u)du\right| \\ &\le 1 + \int\limits_{-\infty}^{-N-k} |\Phi(u)|du + \int\limits_{N-k}^{+\infty} |\Phi(u)|du \\ &\le 1 + \tfrac{2C}{M} \qquad (\text{ wegen } (*))\end{aligned}$$

2) Ist $N-M < |k| \le N+M$, so verwenden wir die Abschätzung

$$\left|\int\limits_{-N-k}^{N-k} \Phi(u)du\right| \le \int_{\mathbb{R}} |\Phi(u)|du \le C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}du =: \hat{C}.$$

3) Ist $|k| > N+M$, so folgt wieder aus (*):

$$\left|\int\limits_{-N-k}^{N-k} \Phi(u)du\right| \le \frac{2C}{|k|-N}.$$

Insgesamt erhalten wir dann die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\|P_j f\|^2 &= 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\int\limits_{-N-k}^{N-k} \Phi(u)\right|^2 = 2^j \left(\sum_{|k|\le N-M} + \sum_{|k|=N-M+1}^{N+M} + \sum_{|k|>N+M}\right) \\ &= 2^j \left(\sum_{|k|\le N-M} |\pm 1 + \Theta_k|^2 + S_2 + S_3\right) \\ &= \tfrac{1}{N}(2(N-M)+1) + \tfrac{1}{N}\left(\sum_{|k|\le N-M} (\Theta_k + \overline{\Theta}_k + |\Theta_k|^2) + S_2 + S_3\right)\end{aligned}$$

wobei

$$\Theta_k := \int\limits_{-\infty}^{-N-k} \Phi(u)du + \int\limits_{N-k}^{+\infty} \Phi(u)du$$

$$\frac{1}{N} \sum_{|k|\le N-M} (\Theta_k + \overline{\Theta}_k + |\Theta_k|^2) \le \frac{1}{N}(2(N-M)+1)\left(\frac{4C}{M} + \frac{4C^2}{M^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{N}S_2 &= 2^j \sum_{|k|=N-M+1}^{N+M} \left|\int\limits_{-N-k}^{N-k} \Phi(u)du\right|^2 \le 2^{j+1} M \hat{C}^2 \\ \tfrac{1}{N}S_3 &= 2^j \sum_{|k|>N+M} \left|\int\limits_{-N-k}^{N-k} \Phi(u)\right|^2 \le 2^j \cdot 4C^2 \sum_{|k|>N+M} \tfrac{1}{|k|-N} \\ &\le 2^{j+3}C^2 \sum_{|k|>N+M+1} \tfrac{1}{(k-N)^2} = 2^{j+3}C^2 \sum_{k=M+1} \tfrac{1}{k^2} \\ \rightsquigarrow 0 &\le \limsup_{j\to-\infty} (\|f\|_2^2 - \|P_j f\|_2^2) = \limsup_{j\to-\infty} (2 - \|P_j f\|_2^2) \\ &\le \limsup_{j\to-\infty} 2^j(2(2^{-j}-M)+1)\left(\tfrac{4C}{M} + \tfrac{4C^2}{M^2}\right) = 2\left(\tfrac{4C}{M} + \tfrac{4C^2}{M^2}\right)\end{aligned}$$

Da $M \in \mathbb{N}$ beliebig groß gewählt werden kann, folgt die gewünschte Konvergenz. $\square$

5 Orthogonale Wavelets mit beschränktem Träger

Gemäß den Überlegungen in Kapitel 3 und 4 und insbesondere in Satz 4.16 besteht also die Aufgabe darin, eine Skalierungsfunktion $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ zu konstruieren, die die folgenden Eigenschaften hat.

(i) $\mathrm{supp}(\Phi)$ beschränkt und Φ stückweise stetig,

(ii) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\Phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \equiv \frac{1}{2\pi}$ (f.f.a.$\omega \in \mathbb{R}$) (vgl. Lemma 4.7),

(iii) $\Phi(\cdot) = \sqrt{2} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_k \Phi(2\cdot -k)$ bzw. $\hat{\Phi}(\cdot) = H\left(\frac{\cdot}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\cdot}{2}\right)$ (vgl. Satz 4.8).

(iv) $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)dt = 1$ bzw. $\hat{\Phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

(v) Das zugehörige orthogonale Wavelet ψ nach Satz 4.14 besitzt Ordnung $N \in \mathbb{N}$, (d.h. die Bedingungen aus Def. 3.6 sind erfüllt).

Das zugehörige orthogonale Wavelet ψ nach Satz 4.14 besitzt dann ebenfalls einen beschränkten Träger.

Wir stellen zunächst fest, daß (i) gemäß Satz 4.10 impliziert, daß nur endlich viele h_k verschieden von 0 sind und deshalb

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_{min}}^{k_{\max}} h_k \exp(-ik\omega),\ \omega \in \mathbb{R},$$

ein trigonometrisches "Polynom" ist, d. h. die Form

$$H(\omega) = Q(\exp(-i\omega)), \quad Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_{min}}^{k_{\max}} h_k y^k,$$

besitzt. Überdies erfüllt $H(\cdot)$ nach Satz 4.8 und (iii) die Bedingungen:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 \equiv 1,\ H(0) = 1,\ H(\pi) = 0.$$

<u>Annahme:</u> $k_{\min} = 0,\ k_{\max} = 2N-1$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $Q(\cdot)$ ist ein reelles Polynom vom Grad $2N-1$.

Nach (v) und Folgerung 3.7 gilt $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, und $\hat{\psi}^{(N)}(0) \neq 0$, d.h. $\hat{\psi}$ besitzt eine Nullstelle N-ter Ordnung in $\omega = 0$.
Geht man nun von dem in Satz 4.14 verwendeten Ansatz

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp\left(i\frac{\omega}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

aus, so sollte also H eine Nullstelle N-ter Ordnung in $\omega = \pi$ besitzen.

Dies führt zu folgendem Ansatz für die erzeugende Funktion $H(\cdot)$:

$$H_N(\omega) := \left(\frac{1+\exp(-i\omega)}{2}\right)^N B_N(\exp(-i\omega))$$

wobei B_N ein Polynom vom Grad $N-1$ mit $B_N(-1) \neq 0$ ist.

Satz 5.1 *(Daubechies)*
Es sei $N \in \mathbb{N}$, wir betrachten die Funktion H_N von oben, wobei B_N so bestimmt ist, daß

$$B_N(\exp(i\omega))B_N(\exp(-i\omega)) = P_N\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right), \ \forall \omega \in \mathbb{R},$$

wobei

$$P_N(y) := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Dann erzeugt die zugehörige Skalierungsfunktion Φ_N eine Multiskalen-Analyse und das Wavelet

$$\psi_N(\cdot) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k \overline{h_{2N-1-k}}\, \Phi_N(2\cdot - k)$$

ist orthogonal, besitzt Ordnung N und erzeugt die Multiskalen-Analyse.

Beweis:
Blatter (Kap. 6.2), Daubechies (Chapter 6).
Bei Anwendung von Satz 4.14 wurden die Koeffizieten so umnumeriert, daß die Summation wie bei Φ über $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$ läuft. □

Beispiel 5.2

N=1: $H_1(\omega) = \frac{1}{2}(1+\exp(-i\omega)), \Phi_1(\cdot) = \chi_{[0,1[}, \psi_1 = \psi_H$.

(gegenüber Beispiel 4.15 führen die umnumerierten Koeffizienten zur Formel $\psi_1 = \Phi_1(2\cdot) - \Phi_1(2\cdot - 1)$).

N=2: $H_2(\omega) = \left(\frac{1+\exp(-i\omega))}{2}\right)^2 B_2(\exp(-i\omega))$, *wobei* $B_2(y) = b_0 + b_1 y$,
$B_2(\exp(i\omega))B_2(\exp(-i\omega)) = P_2\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$ *mit* $P_2(y) = 1 + 2y$.
Folglich muß gelten:

$$\begin{aligned} \leadsto (b_0 + b_1\exp(i\omega))(b_0 + b_1\exp(-i\omega)) &= 1 + 2\sin^2\tfrac{\omega}{2} = 2 - \cos\omega \\ &= 2 - \tfrac{1}{2}(\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$\leadsto \quad b_0^2 + b_1^2 = 2, \ b_0 b_1 = -\frac{1}{2}$

$\leadsto \quad b_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad b_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\leadsto \quad h_{0/3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}, \quad h_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

Man kann zeigen: Φ_2 ist stetig (vgl. Blatter, Kap 6.3).

N=3: vgl. Blatter, Kap 6.2.

6 Schnelle Wavelet-Tranformation

Es sei Φ die Skalierungsfunktion einer MSA und ψ das orthogonale Wavelet gemäß Satz 4.14. Insbesondere genügt Φ der Skalierungsgleichung

$$(1) \qquad \Phi(t) = \sqrt{2}\sum_k h_k \Phi(2t-k) \quad (t \in \mathbb{R})$$

und ψ der entsprechenden Gleichung nach Satz 4.14, d.h.,

$$(2) \qquad \psi(t) = \sqrt{2}\sum_k g_k \Phi(2t-k) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dabei berechnen sich die Koeffizienten g_k aus den h_k wie in Satz 4.14 oder wie später in Satz 6.2. Zur Abkürzung führen wir wieder die Funktionensysteme

$$\Phi_{j,\ell}(t) := 2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^{-j}t-\ell), \qquad \psi_{j,\ell}(t) := 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-\ell), \qquad j,\ell \in \mathbb{Z},$$

ein. Dann folgen aus (1) bzw. (2) die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} (3) \qquad \Phi_{j,\ell} & = & 2^{-\frac{j}{2}}2^{\frac{1}{2}}\sum\limits_k h_k\Phi(2(2^{-j}t-\ell)-k) = \sum\limits_k h_k \Phi_{j-1,2\ell+k} \\ (4) \qquad \psi_{j,\ell} & = & \sum\limits_k g_k \Phi_{j-1,2\ell+k} \end{array}\right\} j,\ell \in \mathbb{Z}.$$

Dies sind Rekursionen für wachsendes j; die Formeln erstrecken sich über endliche Summen, falls der Träger von Φ endlich ist.

Es sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ eine bzgl. der MSA zu analysierende Funktion und es sei V_{j_0} der Raum mit dem kleinsten $j_0 \in \mathbb{Z}$, der feinsten in Betracht gezogenen Skala (d. h. nur Details der Ausdehnung $\geq 2^{j_0}$ werden einbezogen).
Die Analyse beginnt dann mit den Daten für $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$a_{j_0\ell} := \langle f, \Phi_{j_0,\ell}\rangle = 2^{-\frac{j_0}{2}}\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\Phi(2^{-j_0}t-\ell)}dt = 2^{\frac{j_0}{2}}\int_{\mathbb{R}} f(2^{j_0}u)\overline{\Phi(u-\ell)}du.$$

Diese müßten durch numerische Integration gewonnen werden oder man setzt einfach

$$a_{j_0,\ell} = 2^{\frac{j_0}{2}} f(t_\ell), \ell \in \mathbb{Z},$$

wobei t_ℓ ein Punkt im (angenommenen) kleinen Träger von $\Phi_{j_0,\ell}$ ist. Dies ist sinnvoll wegen $\int_{\mathbb{R}} \Phi_{0,\ell}(t)dt = 1$ und damit $\int_{\mathbb{R}} \Phi_{j_0,\ell}(t)dt = 2^{\frac{j_0}{2}}$.

Analyse: (bedeutet Übergang von $j-1$ zu j; von „fein“ zu „grob“)

Es gilt: $P_{j-1}f = \sum\limits_k a_{j-1,k}\Phi_{j-1,k}, \quad a_{j-1,k} := \langle f, \Phi_{j-1,k}\rangle$.
Aus (3) bzw. (4) folgen dann die folgenden Rekursionen für $j,\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\begin{array}{llll} a_{j.\ell} & = \langle f, \Phi_{j,\ell}\rangle & = \sum\limits_k \bar{h}_k \langle f, \Phi_{j-1,2\ell+k}\rangle & = \sum\limits_k \bar{h}_k a_{j-1,2\ell+k} \\ d_{j.\ell} & := \langle f, \psi_{j,\ell}\rangle & = \sum\limits_k \bar{g}_k \langle f, \Phi_{j-1,2\ell+k}\rangle & = \sum\limits_k \bar{g}_k a_{j-1,2\ell+k} \end{array}}$$

D. h. es lassen sich die Koeffizienten der Wavelet-Reihe

$$f = \sum_{j,\ell \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,\ell} \rangle \psi_{j,\ell}$$

berechnen, ohne explizit Φ bzw. ψ zu benutzen.

Jetzt nehmen wir umgekehrt an, daß wir für ein großes $j_1 \in \mathbb{Z}$ die Koeffizienten

$$a_{j_1,\ell} = \langle f, \Phi_{j_1,\ell} \rangle \text{ und } d_{j_1,\ell} = \langle f, \psi_{j_1,\ell} \rangle, \ \ell \in \mathbb{Z},$$

haben, und daß wir f rekonstruieren bzw. synthetisieren wollen.

<u>Synthese:</u> (Übergang von j zu $j-1$; von „grob" zu „fein")

Es gilt: $P_{j-1}f = P_j f + Q_j f := \sum_k a_{j,k}\Phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}$, $j \leq j_1$ und deshalb sowie wegen (3) und (4) für alle $j \leq j_1, \ell \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a_{j-1,\ell} &= \langle f, \Phi_{j-1,\ell} \rangle = \langle P_{j-1}f, \Phi_{j-1,\ell} \rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} \langle \Phi_{j,k}, \Phi_{j-1,\ell} \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \Phi_{j-1,\ell} \rangle \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\boxed{a_{j-1,\ell} = \sum_k a_{j,k} h_{\ell-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{\ell-2k}}$$

Daraus lassen sich dann auch alle $d_{j,\ell}$, $j < j_1, \ell \in \mathbb{Z}$, berechnen.

<u>Fazit:</u> Für Analyse und Synsthese werden nur die $h_k, k \in \mathbb{Z}$, benötigt; weder Φ noch ψ müssen vorrätig sein oder berechnet werden.

Sollte jedoch die <u>Berechnung</u> der Skalierungsfunktion Φ im Zeitbereich erforderlich sein, so empfiehlt sich die sog. direkte Methode, bei der mit Hilfe der Skalierungsgleichung (1) die Werte von Φ in allen „dual rationalen" Zahlen $\{k2^{-j} : k, j \in \mathbb{Z}\}$, einer in $\mathbb{R}$ dichten Menge, berechnet werden können.

Annahme: supp $\Phi \subseteq [0, 2N-1]$ (vgl. Kap. 5).
Wir setzen $\mathbb{D}_j := \{k2^{-j} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, und wissen daß

$$\mathbb{Z} = \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{D}_j \subset \mathbb{D}_{j+1} \subset \cdots \subset \mathbb{D} := \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} \mathbb{D}_j, \ \bar{\mathbb{D}} = \mathbb{R}.$$

Die direkte Methode beruht auf folgenden Beobachtungen:

(i) Ist $t \in \mathbb{D}_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$, so gilt $2t - k \in \mathbb{D}_{j-1}$, $\forall k \in J := \{0, 1, \ldots, 2N-1\}$.

(ii) Ist $t < 0$ bzw. $t > 2N-1$, so gilt $2t - k < 0$ bzw. $2t - k > 2N-1$ für alle $k \in J$.

Deshalb erlaubt die Skalierungsgleichung

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \Phi(2t-k)$$

die sukzessive Berechnung der Werte von Φ auf $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}_0, \mathbb{D}_2 \setminus \mathbb{D}_1, \ldots$ usw. ausgehend von $\Phi(j)$, $j \in J$. Letztere Werte werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\Phi(j) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \Phi(2j-k)\,,\; j \in J,$$

berechnet.