1. und 2. Fundamentalform regulärer Flächen

Proseminar „Differentialgeometrie“

Von
Daniel Schliebner

Herausgabe: 05. Dezember 2007

6.1 Einführung

In diesem Vortrag betrachten wir (reguläre) Flächen im dreidimensionalen Raum und untersuchen einige grundlegende Begriffe der Flächentheorie, um dann später Eigenschaften wie z.B. den Begriff der Krümmung einführen zu können.

Definition. (*Reguläre Fläche*)
Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt reguläre Fläche, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte injektive Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ gibt, sodass gilt:

(i) $\Phi(U) = S \cap V$,

(ii) $\Phi : U \to \Phi(U)$ ist ein Homöomorphismus,

(iii) $\mathrm{rg} D_u \Phi = 2$.

Bemerkung:
Reguläre Flächen sind also 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten (UMF) des $\mathbb{R}^3$, da die in der o.g. Definition eingeführte Abbildung Φ eine Parametrisierung von S durch zwei Parameter ist.

—

6.2 Erste Fundamentalform

Motivation: Damit wir auf regulären Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ Geometrie betreiben können, ist es notwendig die Ideen der Linearen Algebra zum Messen von Längen und Winkeln in einem euklidischen Vektorraum in gewisser Weise auf UMF zu übertragen. Wie wir wissen, bildet der Tangentialraum an einen Punkt $p \in S$ einen 2-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Entsprechend können wir also das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ auf den Tangentialraum T_pS einschränken. Mittels dieser Überlegungen erhalten wir die

Definition. (*1. Fundamentalform einer regulären Fläche*)
Sei $p \in S$ ein Punkt auf der regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$. Die Familie $\{g_p\}_{p\in S}$ von Bilinearformen

$$\begin{array}{rcccl} g_p : & T_pS & \times & T_pS & \to \mathbb{R} \\ & (x & , & y) & \mapsto \langle x, y \rangle \end{array}$$

heißt erste Fundamentalform von S. Für die Gram-Matrix von (T_pS, g_p) erhalten wir

$$(g_{ij}(p)) = \left(g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) \right)$$

bezüglich der kanonischen Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$ von T_pS. $(g_{ij}(p)) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist mithin symmetrisch und positiv definit.

Bezeichnung: $I_p(x,y) := g_p(x,y)$.

Bemerkung:
Wir kennen die erste Fundamentalform auch als induzierte Riemannsche Metrik auf S.

Beispiel 1:
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch $p_0 \in \mathbb{R}^3$, welche durch $x, y \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird. Man beschreibe S durch affin-lineare Koordinaten, d.h. mittels $\phi(u_1, u_2) := p_0 + u_1 x + u_2 y$ für $x, y, p_0 \in \mathbb{R}^3$. Dann erhalten wir

$$I_p(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2:
Sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ die Zylinderfläche, parametrisiert durch $\phi(\varphi, t) := (\cos\varphi, \sin\varphi, t)$. Dann erhalten wir in $p \in S$:

$$I_p(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.a. ist die 1. Fundamentalform aber nicht-konstant, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3:
Sei S die x-y-Ebene aus im $\mathbb{R}^3$. Dann können wir S durch Polarkoordinaten parametrisieren, d.h. mittels $\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$. Dann erhalten wir:

$$I_p(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

—

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die erste Fundamentalform ändert, wenn wir die lokale Parametrisierung verändern.

Satz 1.
Seien (U, φ^{-1}) und $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}^{-1})$ zwei Karten für die reguläre Fläche S und $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei Parametrisierungen. Des Weiteren bezeichne $F := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ die Parametertransformation. Dann erhalten wir folgende Identifizierung zwischen den Fundamentalformen (ausgedrückt in ihrer Gram-Matrix):

$$(g_{ij}) = DF(\varphi^{-1})^T \cdot (\tilde{g}_{ij}) \cdot DF(\varphi^{-1}).$$

Beweis: sei $p \in S$. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass uns der Basiswechsel einer GRAM-Matrix auf kongruente Matrizen führt. Es bezeichne nun $[1]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ die Übergangsmatrix von der Basis $\mathcal{C}$ zur Basis $\mathcal{B}$.

In diesem Fall sei nun $\mathcal{B}$ die kanonische Basis von T_pS bzgl. $(U, \tilde{\varphi}^{-1})$ und $\mathcal{C}$ die kanonische Basis von T_pS bzgl. (U, φ^{-1}). Dann gilt:

$$\begin{aligned} (g_{ij}(p)) &= [1]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^T \cdot (\tilde{g}_{ij}(p)) \cdot [1]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ &= D(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))^T \cdot (\tilde{g}_{ij}(p)) \cdot D(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \\ &= DF(\varphi^{-1})^T \cdot (\tilde{g}_{ij}) \cdot DF(\varphi^{-1}). \end{aligned}$$

□

—

Die erste Fundamentalform beschreibt uns also die innere Geometrie einer Fläche, d.h. Eigenschaften, welche sich durch Längenmessungen innerhalb dieser Fläche ermitteln lassen.

6.3 Normalenfelder und Orientierbarkeit

Um nun die zweite Fundamentalform einführen zu können, benötigen wir die Begriffe der Orientierbarkeit und der Normalenfelder (speziell auch der Einheitsnormalenfelder). Zur Wiederholung dieser Begriffe soll daher dieser Abschnitt dienen. Insbesondere werden wir der Einfachheit halber den Orientierungsbegriff mithilfe der Normalenfelder definieren.

Definition. (*Normalenfeld*)
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein Normalenfeld auf S ist eine Abbildung

$$N : S \to \mathbb{R}^3,$$

sodass $N(p) \perp T_pS$ für alle $p \in S$. N heißt überdies Einheitsnormalenfeld, falls zusätzlich $||N(p)|| = 1$ für alle $p \in S$ gilt.

—

Definition. (*Orientierbarkeit*)
Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt orientierbar, falls es ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S gibt.

—

6.4 Zweite Fundamentalform

Die zweite Fundamentalform regulärer Flächen wird uns nun die Möglichkeit geben, Flächencharakteristika beschreiben zu können, welche zusätzlich zu den Längenabhängigen Eigenschaften noch von der Lage der Fläche im umgebenen Raum abhängen (wie wir später sehen werden, ist dies z.B. die Krümmung). Dazu betrachten wir in diesem Abschnitt orientierbare reguläre Flächen mit glattem Einheitsnormalenfeld.

Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit einem glatten Einheitsnormalenfeld N. Dann hat N wegen der Forderung $||N(p)|| = 1$ nur Bildwerte in S^2. Fassen wir nun N als Abbildung zwischen den Flächen S und S^2 auf, so nennen wir N die Gauß-Abbildung:

Definition. (*Gauß-Abbildung*)
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N. Dann heißt $N : S \to S^2$ die Gauß-Abbildung.

—

Beobachtung:
Für einen Punkt $p \in S$ betrachte man nun das Differential $d_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2$. Nun ist aber $T_{N(p)}S^2 = \operatorname{bild} N^{\perp} = T_pS$. Also ist

$$d_pN : T_pS \to T_pS$$

aufgrund der Linearität von d_pN ein Endomorphismus des Raumes T_pS. Dem schließt sich nun die folgende Definition einer für uns wichtigen Abbildung an.

—

Definition. (*Weingarten-Operator*)
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Einheitsnormalenfeld N. Der Endomorphismus

$$\begin{array}{rccc} W_p : & T_pS & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -d_pN(x) \end{array}$$

heißt Weingarten-Operator (oder Weingarten-Abbildung).

Beispiel 1:
Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x-y-Ebene. Dann erhalten wir ein glattes Einheitsnormalenfeld mittels $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$, sodass $W_p \equiv 1 \ \forall p \in S$.

Beispiel 2:
Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder mit Radius 1. Dann erhalten wir ein glattes Einheitsnormalenfeld mittels $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Die kanonische Basis von T_pS in

$p = (x, y, z) \in S$ stellt sich dann dar durch $\{\frac{\partial}{\partial\varphi}(p), \frac{\partial}{\partial t}(p)\} = \{(-y, x, 0), (0, 0, 1)\}$. Damit:

$$\begin{array}{rclcl} W_p(0,0,1) & = & -d_pN(0,0,1) & = & (0,0,0) \\ W_p(-y,x,0) & = & -d_pN(-y,x,0) & = & (y,-x,0) \end{array}$$

und damit $W_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zur zweiten Fundamentalform regulärer Flächen führt uns nun der nächste Satz.

—

Satz 2.
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Weingarten-Operator W_p. Dann ist W_p ein selbstadjungierter Operator (SAO).

Beweis: sei N das Einheitsnormalenfeld von S, $W_p = -d_pN$ die Weingarten-Abbildung und $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung um $p = \Phi(u)$. Ferner sei $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(u), \frac{\partial}{\partial x_2}(u)\}$ die kanonische Basis des Tangentialraums, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = D\Phi_u(e_i) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(u).$$

Da $N(p) \perp T_pS$ für alle $p \in S$, gilt entlang der j-ten Koordinatenlinie $u + te_j \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(u + te_j), N(\Phi(u + te_j)) \right\rangle \equiv 0$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach t an der Stelle $t = 0$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(u + te_j), N(\Phi(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ & = & \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(u + te_j)\Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(u), d_pN \circ D_u\Phi(e_j) \right\rangle \\ & = & \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}(u), N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, -W_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) \right\rangle \\ & = & \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}(u), N(p) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, W_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) \right\rangle. \end{array}$$

Wir erhalten also:

$$I_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, W_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, W_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}(u), N(p) \right\rangle.$$

Nach dem Satz von Schwarz können wir nun aber die partiellen Ableitungen vertauschen, da Φ glatt ist. Damit erhalten wir aufgrund der eben gezeigten Identität:

$$I_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, W_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}(u), N(p) \right\rangle. = \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(u), N(p) \right\rangle. = I_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, W_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right).$$

Nun ist aber I_p symmetrisch, wodurch:

$$I_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, W_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = I_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, W_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) = I_p\left(W_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Damit haben wir die Selbstadjungiertheit bezüglich der beiden Basisvektoren von T_pS gezeigt. Insbesondere sind nun alle $x, y \in T_pS$ durch Linearkombinationen der Basisvektoren darstellbar. Aus der Linearität von I_p folgt damit die Behauptung:

$$I_p(x, W_p(y)) = I_p(W_p(x), y)\ \forall x, y \in T_pS,$$

d.h. W_p ist selbstadjungiert bezüglich der ersten Fundamentalform. □

—

Erinnerung: dieser Satz gibt uns nun die Grundlage zur Definition der zweiten Fundamentalform. Wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, existiert nämlich eine natürliche Bijektion zwischen den SAO und den Bilinearformen. Sei nämlich $W \in SAO$ ein selbstadjungierter Endomorphismus auf V und $\phi \in Bil(V)$. Dann erhalten wir eine Identifizierung:

$$\begin{array}{rcl} SAO & \longleftrightarrow & Bil(V) \\ W & \longleftrightarrow & \phi(x,y) = \langle W(x), y\rangle \end{array}$$

für $x, y \in V$.

—

Definition. (*Zweite Fundamentalform*)
Sei $W_p \in SAO$ der Weingartenoperator der regulären Fläche S im Punkt $p \in S$. Die im o.g. Sinne zu W_p gehörige Bilinearform $II_p(x, y)$ mit

$$II_p(x,y) = I_p(W_p(x), y), \quad x, y \in T_pS$$

heißt zweite Fundamentalform der Fläche S im Punkt p.

Bemerkung: (*Ausdruck in lokalen Koordinaten*)
Wir können auch die zweite Fundamentalform in lokalen Koordinaten ausdrücken. Sei nämlich $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und Φ eine lokale Parametrisierung von S um p. Sei ferner $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$ die kanonische Basis von T_pS. Dann wissen wir, dass die erste Fundamentalform durch die symmetrische Gram-Matrix

$$(g_{ij}(p)) = \left(I_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right)\right)$$

beschrieben wird. Entsprechend erhalten wir für die Gram-Matrix der zweiten Fundamentalform:

$$\begin{aligned}(\tilde{g}_{ij}(p)) &= \left(II_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right)\right) \\ &= \left(I_p\left(W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right)\right) \\ &= \left\langle \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_i}(u), N(p)\right\rangle .\end{aligned}$$

Beispiel 1:
Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder mit Radius 1. Wir man sich leicht überlegt, gilt hier $II_p = W_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

—

6.5 Normalkrümmung und Hauptkrümmung

Wir wollen nun eine erste Anwendung der zweiten Fundamentalform betrachten. Die Normalkrümmung stellt dabei eine geometrische Interpretation der zweiten Fundamentalform dar.

Definition. (*Normalkrümmung*)
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N, $p \in S$. Sei ferner $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine nach bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Dann heißt

$$\kappa_{\text{nor}} := \langle c''(0), N(p)\rangle .$$

die Normalkrümmungvon S im Punkt p in Richtung $c'(0)$.

Bemerkung:
Die Normalkrümmung bezeichnet die Krümmung von S in $\mathbb{R}^3$. Betrachten wir daher c als Raumkurve, so kennen wir die Krümmung von c in 0, nämlich

$$c''(0) = \kappa(0) \cdot n(0),$$

wobei hier n den Hauptnormalenvektor in 0 bezeichnet. Entsprechend erhalten wir also alternativ für κ_{nor} die Darstellung:

$$\kappa_{\text{nor}} = \kappa(0) \cdot \langle n(0), N(p)\rangle .$$

Bezeichnet θ den Winkel zwischen $N(p)$ und $n(0)$, so gilt demnach:

$$\kappa_{\text{nor}} = \kappa(0) \cdot \cos\theta.$$

—

Den angekündigten Zusammenhang gibt uns nun der

Satz von Meusnier.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche und $p \in S$. Sei ferner $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine nach bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Dann gilt:

$$\kappa_{\text{nor}} = II_p(c'(0), c'(0)).$$

Beweis: da c innerhalb von S verläuft, gilt:

$$\langle N(c(t)), c'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach t in 0, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{d}{dt} \langle N(c(t)), c'(t) \rangle \,|_{t=0} \\ & = & \left\langle \frac{d}{dt} N(c(t))|_{t=0}, c'(0) \right\rangle + \langle N(p), c''(0) \rangle \\ & = & \langle d_p N(c'(0)), c'(0) \rangle + \kappa_{\text{nor}} \\ & = & \langle -W_p(c'(0)), c'(0) \rangle + \kappa_{\text{nor}} \\ & = & -II_p(c'(0), c'(0)) + \kappa_{\text{nor}}. \end{array}$$

□

Der Satz zeigt uns zum einen den Zusammenhang der Normalkrümmung mit der zweiten Fundamentalform und zum anderen zeigt er auch, dass die Normalkrümmung nicht von der Wahl der Kurve abhängt.

—

Zuletzt führen wir nun den Begriff der Hauptkümmung einer regulären Fläche ein: nach dem Spektralsatz finden wir zu dem selbstadjungierten Operator W_p eine Orthonormalbasis $\{x_1, x_2\}$ von T_pS, welche aus den Eigenvektoren von W_p besteht:

$$W_p(x_i) = \kappa_i \cdot x_i, \quad i = 1, 2.$$

Dem schließt sich nun die folgende Definition an.

Definition. (*Hauptkrümmung*)

Die Eigenwerte κ_i heißen Hauptkrümmungen von S im Punkt p. Die zugehörigen Eigenvektoren $\pm x_1, \pm x_2$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Beispiel 1:

Ein abschließendes Beispiel soll einmal die beiden Hauptkrümmungen des Torus berechnen. Sei also S der Torus, gegeben durch die Parametrisierung

$$\phi(\theta,\varphi) = ((a+b\cos\varphi)\cos\theta, (a+b\cos\varphi)\sin\theta, b\sin\varphi).$$

Überdies sei $p=(\theta,\varphi)$. Dann erhalten wir für die kanonischen Basisvektoren des T_pS:

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(p) = (a+b\cos\varphi)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0), \\ X_2 & = & \frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(p) = b\cdot(-\sin\varphi\cos\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi). \end{array}$$

Ein glattes Einheitsnormalenfeld erhalten wir mittels

$$N(\phi(p)) = \frac{X_1\times X_2}{||X_1\times X_2||} = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Schließlich ergeben sich dann folgende Bilder von X_1, X_2 unter W_p:

$$\begin{array}{rcl} W_p(X_1(p)) & = & -d_pN(X_1(p)) = -d_pN(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(p)) \\ & = & \frac{\partial(N\circ\phi)}{\partial\theta}(p) \\ & = & -(-\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) \\ & = & -\frac{\cos\varphi}{a+b\cos\varphi}\cdot X_1(p), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} W_p(X_2(p)) & = & -d_pN(X_2(p)) = -d_pN(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(p)) \\ & = & \frac{\partial(N\circ\phi)}{\partial\varphi}(p) \\ & = & -(-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) \\ & = & -\frac{1}{b}\cdot X_2(p). \end{array}$$

D.h. die beiden Haupkrümmungen des Torus sind

$$\kappa_1 = -\frac{1}{b} \text{ und } \kappa_2 = -\frac{\cos\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

—

6.6 Literatur

1. [B] *C. Bär: Elementare Differntialgeometrie. de Gruyter Lehrbuch, 2001.*
2. [K] *W. Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg-Verlag, 1999.*
3. [W] *http://de.wikipedia.org*