Lösung von Fouriertransformationen

—

Abstract: dieser Artikel soll eine kurze Übersicht darüber geben, wie sich Fouriertransformationen, d. h. reelle Integrale der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx \end{aligned} \tag{1}$$

für $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mithilfe der Funktionentheorie lösen lassen.

Literatur: [1] Skript zur Funktionentheorie von Prof. Dr. H. Baum, http://www.mathematik.hu-berlin.de/∼baum/.

Autor: Daniel Schliebner, schliebn@math.hu-berlin.de.

—

1. Konstruktion der Lösung

Sei zunächst $\alpha > 0$. Der Residuensatz der Funktionentheorie liefert ein geeignetes Werkzeug Integrale der Form (1) zu lösen.

Hierzu erweitert man die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zu einer Funktion $\hat{g} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ auf den komplexen Zahlen mit $\hat{g}|_{\mathbb{R}} = g$ und betrachtet das Wegintegral

$$\int_{-r}^{s} \overbrace{\hat{g}(z) \cdot e^{i\alpha z}}^{f(z)} dz,$$

wobei die Strecke $\overline{-rs} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als Weg in $\mathbb{C}$ interpretiert wird. Hierbei sind $r, s \in \mathbb{R}$ derart zu wählen, dass das Quadrat Q mit den Eckpunkten $s, s + iq, -r + iq, -r$ und $q = r + s$ alle $z_j \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z_j) > 0$ enthält:

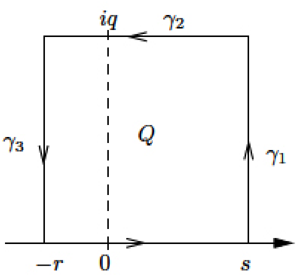

Abbildung 1: Konstruktion einer geschlossenen Kurve ∂Q in $\mathbb{C}$

Die Idee hinter dieser Konstruktion ist die Folgende: der Rand des Quadrates Q ist eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ und $\hat{g}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ definiert. Damit gilt der Residuensatz und folglich:

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_j)>0} \mathrm{Res}(f, z_j) = \int_{\partial Q} f(z) dz = \int_{\partial Q} \hat{g}(z) e^{i\alpha z} dz = \int_{-r}^{s} \hat{g}(z) e^{i\alpha z} dz + \int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3} \hat{g}(z) e^{i\alpha z} dz.$$

Hierbei bezeichne $\mathrm{Res}(f, z_j)$ das Residuum von f in z_j. In der Tat lässt sich zeigen, dass $\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3} \hat{g}(z) e^{i\alpha z} dz \longrightarrow 0$ für $r, s \longrightarrow +\infty$ (vgl. [1]), sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z) e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_j)>0} \mathrm{Res}(f, z_j). \tag{2}$$

Für den Fall $\alpha < 0$ erhalten wir auf gleichem Wege die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z) e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_j)<0} \mathrm{Res}(f, z_j). \tag{3}$$

Da die Integrale in (2) und (3) im Wesentlichen Riemann-Integrale sind und der Integrationsbereich nur über $\mathbb{R}$ liegt, können wir von $\hat{g}$ wegen $\hat{g}|_{\mathbb{R}} = g$ wieder zu g übergehen. Dies gibt uns die Lösungsformel.

2. Lösung

Sei $f(z) := \hat{g}(z) e^{i\alpha z}$. Dann ist:

$$\boxed{\mathcal{F}(\alpha) = \begin{cases} 2\pi i \displaystyle\sum_{\mathrm{Im}(z_j)>0} \mathrm{Res}(f, z_j) & , \text{ falls } \alpha > 0 \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{\mathrm{Im}(z_j)<0} \mathrm{Res}(f, z_j) & , \text{ falls } \alpha < 0 \end{cases}}$$

die Lösung der Fouriertransformation $\mathcal{F}(\alpha)$.

3. Beispiel

Man betrachte die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a} \cdot e^{-i\rho\hbar^{-1}x} dx, \quad \rho, \hbar > 0$$

Sei also $g(x) := \frac{1}{x^2+a}$ gemäß der Notation aus Abschnitt 1. Die komplexe Fortsetzung $\hat{g}$ hat dann zwei Singulariräten bei $z_{1,2} = \pm i\sqrt{a}$ und es gilt

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{z + i\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{z - i\sqrt{a}}.$$

Bei z_1, z_2 handelt es sich also um Polstellen erster Ordnung. Wegen $\alpha = -\rho\hbar^{-1} < 0$ interessiert uns wegen $\mathrm{Im}(z_2) = -\sqrt{a} < 0$ lediglich die Polstelle $z_2 = -i\sqrt{a}$ (siehe Formel in Abschnitt 2). Es gilt also:

$$\mathcal{F}(\alpha) = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(\hat{g}(z)e^{-i\rho\hbar^{-1}z}, z_2).$$

Wir haben daher nur noch das Residuum von $f(z) := \hat{g}(z)e^{-i\rho\hbar^{-1}z}$ zu ermitteln. Da z_2 auch in f nur Polstelle erster Ordnung ist, können wir das Residuum recht einfach berechnen. Es gilt:

$$\mathrm{Res}(f, -i\sqrt{a}) = \lim_{z \to -i\sqrt{a}} (z + i\sqrt{a}) \cdot f(z) = -\frac{1}{2i\sqrt{a}} \cdot e^{\sqrt{a}\rho\hbar^{-1}}.$$

Wir erhalten also:

$$\mathcal{F}(\alpha) = 2\pi i \cdot -\frac{1}{2i\sqrt{a}} \cdot e^{\sqrt{a}\rho\hbar^{-1}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a}} \cdot e^{\sqrt{a}\rho\hbar^{-1}}.$$