Holonomiegruppen Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Skript zum Seminarthema „Holonomiegruppen
von Überlagerungen und Riemannschen Produkten“

Sommersemester 2009
an der Humboldt Universität zu Berlin.

Daniel Schliebner

Herausgabe: 20. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Ziel dieses Skriptes ist der Beweis des Satzes zur Berechnung der Holonomiegruppe universell überlagerter semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten (M, g), d. h. es existiert eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ mit einer glatten Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$, welche $\widetilde{g} = \pi^* g$ erfüllt. Zum anderen soll bewiesen werden, dass die Holonomiegruppe eines semi-Riemannschen Produktes $M_1 \times M_2$ gerade das Produkt der Holonomiegruppen von M_1 und M_2 ist.

2. Grundlagen

Dieser Abschnitt soll die für den Beweis notwendigen topologischen und differentialgeometrischen Grundlagen zusammentragen.

Definition 1 *Sei M ein topologischer Raum. Eine* <u>*Überlagerung*</u> *von M ist ein topologischer Raum $\widetilde{M}$ mit einer stetigen Abbildung $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ und der Eigenschaft:*

$$\forall x \in M \ \exists U \subset M,\ x \in U : \quad \pi^{-1}(U) = \coprod\nolimits_{i \in I} V_i$$

für offene $V_i \subset \widetilde{M}$ und $\pi|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ ist ein Homöomorphismus.

Definition 2 *Sei $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ eine Überlagerung von M und $f : N \to M$ stetig. Dann heißt eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : N \to \widetilde{M}$ mit*

$$\pi \circ \widetilde{f} = f$$

<u>*Hebung*</u> *oder* <u>*Lift*</u> *von f. Man sagt „f liftet sich zu $\widetilde{f}$“.*

Satz 1 (Homotopien liften immer) *Sei $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ eine Überlagerung von M und $H : N \times [0,1] \to M$ eine stetige Abbildung. Ferner sei ein Lift $\widetilde{H}_0 : N \times \{0\} \longrightarrow \widetilde{M}$ von $H|_{N \times \{0\}}$ gegeben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Lift $\widetilde{H}$ von H mit*

$$\widetilde{H}|_{N \times \{0\}} = \widetilde{H}_0.$$

Insbesondere sind Überlagerungen also Hurewicz-Faserungen.

Folgerung 1 *Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ ein in $x \in M$ geschlossener Weg mit $\gamma \simeq_H c_x$ und $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \widetilde{M}$ ein Lift von γ, d. h. es gelte $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Dann ist auch $\widetilde{\gamma}$ geschlossen und null-homotop.*

Definition 3 *Eine glatte Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ heißt* <u>*semi-Riemannsche Überlagerung*</u>*, falls gilt: $\pi^* g = \widetilde{g}$.*

Definition 4 *Eine semi-Riemannsche Überlagerung $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ heißt* <u>*universelle*</u> *semi-Riemannsche Überlagerung, falls $\widetilde{M}$ einfach-zusammenhängend ist.*

Bemerkung 1 *Eine universelle semi-Riemannsche Überlagerung ist im allgemeinen keine Isometrie. Aufgrund der Nichtausgeartetheit der Metrik g sieht man jedoch leicht, dass π eine lokale Isometrie ist (man nutze den Satz über den lokalen Diffeomorphismus).*

Satz 2 (Universalüberlagerungen) *Zu jeder semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert (bis auf Isometrie) genau eine semi-Riemansche Universalüberlagerung.*

3. Holonomie von Überlagerungen und Produkten

Wir erinnern zunächst an einen Satz aus der Differentialgeometrie.

Satz 3 *Sei $f : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$ eine Isometrie semi-Riemannscher Überlagerungen, d. h. f sei ein C^∞-Diffeomorphismus und es gelte $f^*g = \widetilde{g}$. Dann gilt bezüglich der Levi-Civita-Zusammenhänge ∇ auf M und $\widetilde{\nabla}$ auf $\widetilde{M}$:*

$$df(\widetilde{\nabla}_X Y) = \nabla_{df(X)} df(Y).$$

Die nun folgenden beiden Sätze sind die zentralen Aussagen des vorliegenden Skriptes und geben uns die Möglichkeit, Holonomiegruppen für universell überlagerte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und semi-Riemannsche Produkte zu bestimmen.

Satz 4 *Sei $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$ die universelle semi-Riemannsche Überlagerung von (M, g) und $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Hol}^0_{\widetilde{x}}(\widetilde{M}, \widetilde{g}) = \mathrm{Hol}_{\widetilde{x}}(\widetilde{M}, \widetilde{g}) \cong \mathrm{Hol}^0_{\pi(\widetilde{x})}(M, g).$$

Vor dem Beweis des Satzes zeigen wir ein Lemma, welches den in Satz 3 gegebenen Zusammenhang der kovarianten Ableitungen von isometrischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten auf die kovariante Ableitung entlang von Kurven $\frac{\nabla}{dt}$ überträgt. Das zum Beweis benutzte Prinzip ist typisch: man besitzt Aussagen über die kovariante Ableitung einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit und überträgt diese auf die kovariante Ableitung entlang von Kurven, indem man $\frac{\nabla}{dt}$ in lokalen Koordinaten darstellt.

Lemma 1 *Sei $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$ eine (lokale) Isometrie, $\widetilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \widetilde{M}$ eine Kurve in $\widetilde{M}$ und $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{M})$ ein Vektorfeld entlang $\widetilde{\gamma}$. Dann gilt:*

$$d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\widetilde{\nabla} \widetilde{X}}{dt}(t) \right) = \frac{\nabla d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X}(t))}{dt}.$$

Beweis:
Es sei $(\widetilde{U}, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte um $\widetilde{\gamma}(t) \in \widetilde{M}$ und bezüglich dieser Karte habe $\widetilde{X}(t)$ die Darstellung

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\gamma}(t)).$$

Da $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$ eine (lokale) Isometrie und damit ein (lokaler) Diffeomorphismus ist, wird $d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X}(t))$ ein Vektorfeld entlang $\pi \circ \widetilde{\gamma}$ und es gilt:

$$d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) \cdot d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\gamma}(t)) \right).$$

Für die kovariante Ableitung von $\widetilde{X}$ entlang $\widetilde{\gamma}$ gilt in lokalen Koordinaten:

$$\frac{\widetilde{\nabla} \widetilde{X}}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\gamma}(t)) + \xi_i(t) \cdot \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}'(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Die Anwendung von $d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\widetilde{\nabla} \widetilde{X}}{dt}(t) \right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i'(t) d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\gamma}(t)) \right) + \xi_i(t) d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}'(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\
&\overset{\text{Satz 3}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i'(t) d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\gamma}(t)) \right) + \xi_i(t) \nabla_{d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{\gamma}'(t))} d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i'(t) d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\gamma}(t)) \right) + \xi_i(t) \nabla_{(\pi \circ \widetilde{\gamma})'(t)} d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\
&= \frac{\nabla d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X}(t))}{dt}.
\end{aligned}$$

□

Mithilfe des Lemmas können wir nun Satz 4 beweisen.

Beweis von Satz 4:
Es sei $\widetilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow M$ eine Kurve in $\widetilde{M}$ und $U \subset M$ eine offene Menge mit $(\pi \circ \gamma)(a) \in U$. Für das Urbild von U unter der universellen Überlagerung gelte:

$$\pi^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} \widetilde{U}_i, \ \widetilde{U}_i \subset \widetilde{M} \text{ offen.}$$

Sei ferner $i_0 \in I$ mit $\widetilde{U}_{i_0}$ ein Index, sodass $\widetilde{\gamma}(a) \in \widetilde{U}_{i_0}$ und $\pi|_{\widetilde{U}_{i_0}}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wähle nun $\hat{b} \in \mathbb{R}$ so, dass $\operatorname{bild}(\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}) = \operatorname{bild}(\widetilde{\gamma}) \cap \widetilde{U}_{i_0}$ für $\widetilde{\gamma}_{\hat{b}} := \widetilde{\gamma}|_{[a,\hat{b}]}$ und bezeichne mit $\widetilde{X}(t) \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}}(\widetilde{M})$ die Parallelverschiebung von $\widetilde{X}$ entlang $\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}$ mit Anfangsvektor $\widetilde{X}(a) = v \in T_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(a)}\widetilde{M}$, d. h. es gelte $\frac{\widetilde{\nabla}\widetilde{X}}{dt}(t) \equiv 0$ und somit

$$\mathcal{P}^{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}}(v) = \widetilde{X}(\hat{b}) \in T_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(\hat{b})}\widetilde{M}. \tag{3.1}$$

Nach Lemma 1 ist das Vektorfeld $X(t) := (d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(t)}(\widetilde{X}(t))$ entlang $\pi \circ \widetilde{\gamma}_{\hat{b}}$ parallelverschoben mit Anfangsvektor $X(a) = (d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(t)}(\widetilde{X}(a)) = (d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(a)}(v)$, d. h. es gilt:

$$\mathcal{P}^{\nabla}_{\pi \circ \widetilde{\gamma}_{\hat{b}}}((d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(a)}(v)) = X(\hat{b}). \tag{3.2}$$

Insgesamt folgt:

$$(d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(\hat{b})}(\mathcal{P}^{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}}(v)) \overset{(3.1)}{=} (d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(\hat{b})}(\widetilde{X}(\hat{b})) = X(\hat{b}) \overset{(3.2)}{=} \mathcal{P}^{\nabla}_{\pi\circ\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}}((d\pi|_{U_{i_0}})_{\widetilde{\gamma}_{\hat{b}}(a)}(v)).$$

Aufgrund der Kompaktheit von $[a,b]$ können wir diese Konstruktion bis $\hat{b}=b$ fortsetzen und erhalten als Folgerung die Identität

$$\mathcal{P}^{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{\gamma}} = (d\pi_{\widetilde{\gamma}(b)})^{-1} \circ \mathcal{P}^{\nabla}_{\pi\circ\widetilde{\gamma}} \circ (d\pi_{\widetilde{\gamma}(a)}). \tag{3.3}$$

Ist nun $\mathcal{P}^{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{\gamma}} \in \mathrm{Hol}^0_{\widetilde{x}}(\widetilde{M},\widetilde{g})$ und $x=\pi(\widetilde{x})$, so folgt aus (3.3) unmittelbar

$$\mathcal{P}^{\widetilde{\nabla}}_{\widetilde{\gamma}} \in (d\pi_{\widetilde{x}})^{-1} \circ \mathrm{Hol}^0_x(M,g) \circ (d\pi_{\widetilde{x}}).$$

Ist andererseits $(d\pi_{\widetilde{x}})^{-1} \circ \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} \circ (d\pi_{\widetilde{x}}) \in (d\pi_{\widetilde{x}})^{-1} \circ \mathrm{Hol}^0_x(M,g) \circ (d\pi_{\widetilde{x}})$, d. h. $\gamma \simeq c_x$ rel $\{a,b\}$ mit $x=\pi(\widetilde{x})$, so liftet sich γ nach Folgerung 1 zu einem Weg $\widetilde{\gamma} \in \Omega_0(\widetilde{x})$. Die Anwendung von (3.3) zeigt dann

$$(d\pi_{\widetilde{x}})^{-1} \circ \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} \circ (d\pi_{\widetilde{x}}) \in \mathrm{Hol}^0_{\widetilde{x}}(\widetilde{M},\widetilde{g}).$$

Wir erhalten schließlich die Behauptung:

$$\mathrm{Hol}^0_{\widetilde{x}}(\widetilde{M},\widetilde{g}) = (d\pi_{\widetilde{x}})^{-1} \circ \mathrm{Hol}^0_{\pi(\widetilde{x})}(M,g) \circ (d\pi_{\widetilde{x}}) \cong \mathrm{Hol}^0_{\pi(\widetilde{x})}(M,g).$$

□

Satz 5 *Für $(M,g)=(M_1,g_1)\times(M_2,g_2)$ und $(x_1,x_2)\in M_1\times M_2$ gilt*

$$\mathrm{Hol}_{(x_1,x_2)}(M,g) = \mathrm{Hol}_{x_1}(M_1,g_1) \times \mathrm{Hol}_{x_2}(M_2,g_2).$$

Beweis:
Für den Tangentialraum von $M_1\times M_2$ in einem Punkt $(x_1,x_2)\in M_1\times M_2$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} T_{(x_1,x_2)}(M_1\times M_2) & \cong & T_{x_1}M_1 \oplus T_{x_2}M_2 \\ v & \longmapsto & (d\,\mathrm{pr}_1)_{(x_1,x_2)}(v) + (d\,\mathrm{pr}_2)_{(x_1,x_2)}(v) =: v_1+v_2, \end{array}$$

wobei $\mathrm{pr}_i : M_1\times M_2 \longrightarrow M_i$ die i-te Koordinatenprojektion bezeichne.
Seien also $v=v_1+v_2$ und $w=w_1+w_2$ Tangentialvektoren in $x:=(x_1,x_2)$ an $M_1\times M_2$ so gilt vermöge dieser Identifizierung für die Produkt-Metrik $g=\mathrm{pr}_1^*\,g_1+\mathrm{pr}_2^*\,g_2$:

$$\begin{aligned} g_x(v,w) &= (\mathrm{pr}_1^*\,g_1)_x(v,w) + (\mathrm{pr}_2^*\,g_2)_x(v,w) \\ &= (g_1)_{\mathrm{pr}_1(x)}((d\,\mathrm{pr}_1)_{(x)}(v),(d\,\mathrm{pr}_1)_{(x)}(w)) + (g_2)_{\mathrm{pr}_2(x)}((d\,\mathrm{pr}_2)_{(x)}(v),(d\,\mathrm{pr}_2)_{(x)}(w)) \\ &= (g_1)_{x_1}(v_1,w_1) + (g_2)_{x_2}(v_2,w_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wir betrachten nun Vektorfelder $X\in\mathfrak{X}(M)$, welche sich als Summe $X=X_1+X_2$ für $X_i\in\mathfrak{X}(M_i)$ für $i=1,2$ darstellen lassen. Man beachte, dass X_1 bzw. X_2 tatsächlich nur Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M_1 bzw. M_2 sind und ihre Koeffizienten somit nur von den Koordinaten dieser Mannigfaltigkeit abhängen.

Man macht sich schnell klar, dass der Kommutator $[X_1, X_2]$ verschwindet, sodass gilt:

$$[X, Y] = [X_1, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2] = [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2], \tag{3.5}$$

wobei $X = X_1 + X_2$ und $Y = Y_1 + Y_2$ wie oben zerlegt wurden. Sind ferner $f_i : M_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, C^∞-Funktionen und $f := f_1 + f_2$, so gilt auch für die Richtungsableitung

$$X(f_1 + f_2) = X_1(f_1) + X_2(f_2). \tag{3.6}$$

Mithilfe der Koszul-Formel errechnet man nun:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla^{g_1 \times g_2}_X Y, Z) &\overset{\text{Koszul}}{=} X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\
&\quad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) \\
&\overset{\substack{(3.4)\\(3.5)\\(3.6)}}{=} X_1(g_1(Y_1,Z_1)) + X_2(g_2(Y_2,Z_2)) + Y_1(g_1(X_1,Z_1)) \\
&\quad + Y_2(g_2(X_2,Z_2)) - Z_1(g_1(X_1,Y_1)) + Z_2(g_2(X_2,Y_2)) \\
&\quad + g([X_1,Y_1] + [X_2,Y_2], Z) + g([Z_1,X_1] + [Z_2,X_2], Y) \\
&\quad + g([Z_1,Y_1] + [Z_2,Y_2], X) \\
&\overset{\substack{\text{Koszul}\\+(3.4)}}{=} 2g_1(\nabla^{g_1}_{X_1} Y_1, Z_1) + 2g_2(\nabla^{g_2}_{X_2} Y_2, Z_2).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

und aus der Nichtausgeartetheit der Metriken folgt aus (3.7) die Identität

$$\nabla^{g_1 \times g_2}_X Y = \nabla^{g_1}_{X_1} Y_1 + \nabla^{g_2}_{X_2} Y_2 \tag{3.8}$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ und $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(M_i)$, $i = 1, 2$.
Die errechnete Identität (3.8) für den Levi-Civita-Zusammenhang lässt sich nun analog zum Beweis von Lemma 1 auf die Ableitung entlang Kurven in folgendem Sinne übertragen: sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \longrightarrow M_1 \times M_2$ eine Kurve und $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M_1 \times M_2)$ ein Vektorfeld entlang γ, welches sich in der Form $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ für $X_i(t) \in \mathfrak{X}_{\gamma_i}(M_i)$, $i = 1, 2$ darstellen lässt. Dann gilt:

$$\frac{\nabla^{g_1 \times g_2} X}{dt}(t) = \frac{\nabla^{g_1} X_1}{dt}(t) + \frac{\nabla^{g_2} X_2}{dt}(t). \tag{3.9}$$

Seien $v_1 \in T_{\gamma_1(a)} M_1$ und $v_2 \in T_{\gamma_2(a)} M_2$. Ferner bezeichne X_1 die Parallelverschiebung entlang γ_1 zum Anfangsvektor v_1 bzw. X_2 die Parallelverschiebung entlang γ_2 zum Anfangsvektor v_2, d. h. es gelte

$$X_1(a) = v_1, \ \frac{\nabla^{g_1} X_1}{dt}(t) \equiv 0 \text{ und } X_2(a) = v_2, \ \frac{\nabla^{g_2} X_2}{dt}(t) \equiv 0.$$

Nach (3.9) ist dann auch $X(t) := X_1(t) + X_2(t)$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ mit Anfangsvektor $X(a) = X_1(a) + X_2(a) = v_1 + v_2$ und es folgt

$$\mathcal{P}^g_\gamma(v_1 + v_2) = (X_1(b), X_2(b)) = (\mathcal{P}^{g_1}_{\gamma_1}(v_1), \mathcal{P}^{g_2}_{\gamma_2}(v_2))$$

und damit die Behauptung. □

4. Beispiele

Beispiel 1 *Als Anwendung wollen wir die Holonomiegruppe des $\mathbb{RP}^n$ für $n > 1$ berechnen. Hierzu interpretieren wir den $\mathbb{RP}^n$ als den Quotientenraum $\mathbb{RP}^n = S^n/_{x\sim -x}$. Die universelle semi-Riemannsche Überlagerung ist dann offensichtlich durch die Projektion*

$$\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \ \pi(x) := [x]$$

auf die Restklassen gegeben. Mithilfe von Satz 4 erhalten wir damit

$$\mathrm{Hol}^0_{[x]}(\mathbb{RP}^n) \cong \mathrm{Hol}_x(S^n) \cong SO(n)$$

für die reduzierte Holonomie. Für ungerade n ist $\mathbb{RP}^n$ orientierbar (siehe Anhang) und aus dem Holonomieprinzip schließen wir

$$\mathrm{Hol}_{[x]}(\mathbb{RP}^n) \cong SO(n), \ \textit{für ungerades } n \in \mathbb{N}.$$

Ist $n > 1$ gerade, so gilt $\mathrm{Hol}_{[x]}(\mathbb{RP}^n) \cong O(n)$. Um dies zu zeigen wähle man die kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_{n+1}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ und die Kurve $\delta : [0, \pi] \longrightarrow S^n$ definiert vermöge $\delta(t) := \cos(t)e_{n+1} + \sin(t)e_1$. Dann ist $\gamma = \pi \circ \delta$ geschlossen in $[e_{n+1}]$ und es gilt $\det \mathcal{P}_\gamma^{\nabla^{\mathbb{RP}^n}} = -1$, denn: sei $x \in S^n$ und $v \in T_xS^n$. Dann gilt für das Differential (wobei $\tau(0) = x, \tau'(0) = v$):

$$d\pi_x(v) = \frac{d}{dt}(\pi \circ \tau(t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\pi \circ (-\tau(t)))\bigg|_{t=0} \overset{\mathrm{KR}}{=} d\pi_{-x}(-v). \tag{4.10}$$

Sei nun $[e_i] = d\pi_{e_{n+1}}(e_i) \in T_{[e_{n+1}]}\mathbb{RP}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wegen $\mathcal{P}_\delta^{\nabla^{S^n}}(e_1) = -e_1$ und $\mathcal{P}_\delta^{\nabla^{S^n}}(e_i) = e_i$, $i = 2, \dots, n$ folgt dann aufgrund der Identität (3.3) sowie (4.10):

$$\mathcal{P}_\gamma^{\nabla^{\mathbb{RP}^n}}([e_i]) = \begin{cases} [e_1] & , \ i = 1, \\ -[e_i] & , \ i = 2, \dots, n, \end{cases}$$

und damit $\det \mathcal{P}_\gamma^{\nabla^{\mathbb{RP}^n}} = -1$ für gerades $n > 1$. Wegen $O(n) = SO(n) \cup \mathcal{P}_\gamma^{\nabla^{\mathbb{RP}^n}} \cdot SO(n)$ folgt schließlich

$$Hol_{[x]}(\mathbb{RP}^n) \cong \begin{cases} SO(n) & , \ n \text{ ungerade}, \\ O(n) & , \ n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Definition 5 *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Fassen wir den $(4,0)$-Krümmungstensor $\mathcal{R}^g$ als Endomorphismus auf den alternierenden $(2,0)$-Tensorfeldern $\bigwedge^2 T^*M$ auf:*

$$\mathcal{R}_M : \bigwedge^2 T^*M \longrightarrow \bigwedge^2 T^*M,$$

so heißt M <u>k-nichtnegativ</u>, falls für die ersten k Eigenwerte λ_j von $\mathcal{R}^g$ gilt: $\lambda_j \geq 0$.

Bemerkung 2 *Sei $e_1, \ldots, e_n$ ein Reper linear unabhängiger Vektoren in TM und $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ das dazu duale Reper. Dann definiert man $\mathcal{R}_M(\sigma^i \wedge \sigma^j) := \sum_{k,\ell} \mathcal{R}^g(e_i, e_j, e_k, e_\ell)\sigma^k \wedge \sigma^\ell$.*

Beispiel 2 *Ist M^n eine kompakte, k-nichtnegative Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Dimension $n > 2$. Dann gilt für die universelle Riemannsche Überlagerung:*

$$(\widetilde{M}, \widetilde{g}) = (\mathbb{R}^d, g) \times (M_1, g_1) \times \ldots \times (M_k, g_k).$$

Dabei ist ein (M_i, g_i) entweder

1. *kompakt und symmetrisch,*
2. *homöomorph zur n-Sphäre oder*
3. *eine Kähler-Mannigfaltigkeit, welche biholomorph zu $\mathbb{CP}^n$ ist.*

Beweis: siehe [2, Seite 129 f.]. □

A. Anhang

Satz 6 *Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann ist $\mathbb{RP}^n$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit.*

Beweis:
Sei n ungerade. Dann haben wir einen Atlas $\mathcal{A} = \{\tilde{U}_i := \pi(U_i), \varphi_i\}_{i=1}^{n+1}$ für

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim = \mathbb{RP}^n$$

mit $U_i := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$ und der Kartenabbildung

$$\varphi_i([x]) := \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

und $[x] = [\frac{x_1}{x_i} : \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}] \in \tilde{U}_i$. Betrachten wir nun den Kartenübergang

$$\begin{aligned}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_1, \ldots, y_n) &= \varphi_j(\pi(y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n)) \\ &= \frac{1}{y_j}(y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

für $i < j$ und $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) \to \varphi_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ und $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \{[x] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0 \neq x_j\}$.
Für die Übergangsmatrix erhalten wir

$$D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_1, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_j} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{y_1}{y_j^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_j} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{y_2}{y_j^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{y_j^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{y_j} & \cdots & 0 & -\frac{y_i}{y_j^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{y_n}{y_j^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{y_j} \end{pmatrix}$$

also

$$\det D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{y_j^{i-1}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{y_j^{n-i+2}} \cdot \left(-\frac{1}{y_j^2} \right) = \frac{1}{y_j^{n+1}}.$$

Für ungerade n lässt sich folglich eine Orientierung realisieren. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Helga Baum, „Eichfeldtheorie“, Springer, 2009.

[2] Robert Greene, „Differential Geometry: Riemannian Geometry (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics)“, American Mathematical Society, 1993.