# Homotopie von Abbildungen und Anwendungen

**Proseminar „Fundamentalgruppen und ihre Anwendungen“**

Bearbeitung: Daniel Schliebner

Herausgabe: 04. Juli 2007

## 8.1 Der Homotopiebegriff

**Definition.** (*Homotopie von Abbildungen*)
Seien $f, g : X \longrightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen den topologischen Räumen $X$ und $Y$. Es heißen $f, g$ homotop, wenn es eine stetige Abbildung

$$\begin{array}{rccccl} h: & X & \times & I & \longrightarrow & Y \\ & (x & , & t) & \mapsto & h(x,t), \; I := [0,1] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

mit

$$h(x,0) = f(x) \;\text{ und }\; h(x,1) = g(x) \; \forall x \in X$$

gibt (es hat dabei $X \times I$ die Produkttopologie). Es bezeichnet dann $h$ die Homotopie von $f$ nach $g$.

**Bezeichnung:** Ist $h$ eine Homotopie von $f$ nach $g$, so schreiben wir $h : f \simeq g$.

**Anschaulich:** Man stelle sich das Intervall $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ als eine Art Zeitintervall vor, welches durch den Parameter $t$ stetig durchlaufen wird. Man kann nun sagen, dass die Homotopie $h$ die Abbildung $f$ stetig in $g$ *deformiert*.

—

Im Folgenden verwenden wir häufig die topologischen Räume $X$ und $Y$. Sofern nichts Gegenteiliges erwähnt wird, meinen wir mit $X, Y$ fortan (allgemeine) topologische Räume.

—

**Satz 1.**
Die zweistellige Relation

$$\mathcal{R} := \{(f,g) \in C(X,Y) \times C(X,Y) \mid \text{ex. Homotopie } h \text{ von } f \text{ nach } g\}$$

ist symmetrisch, reflexiv und transitiv; d.h. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$.

**Beweis:** Seien $f, g_0, g_1, g_2 \in C(X,Y)$. Dann verifiziere:

1. Reflexivität: Es ist $f \simeq f$ mit Homotopie $h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, $h(x,t) := f(x)$.
2. Symmetrie: Es sei $g_0 \simeq g_1$ mit Homotopie $h_0 : X \times [0,1] \longrightarrow Y$. Betrachte

$$h_1 : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ mit } h_1(x,t) := h_0(x, 1-t).$$

   Dann ist $h_1$ eine Homotopie von $g$ nach $f$.

3. Transitivität: Es seien $g_0 \simeq g_1 \simeq g_2$ mit $h_0 : g_0 \simeq g_1$, $h_1 : g_1 \simeq g_2$. Dann betrachte

$$h_2 : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ mit } h_2(x,t) := \begin{cases} h_0(x,2t) & , \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_1(x,2t-1) & , \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Damit ist also $h_2(x,0) = h_0(x,0) = g_0(x)$ und $h_2(x,1) = h_1(x,1) = g_2(x)\ \forall x \in X$. Bleibt noch die Stetigkeit zu prüfen: nach Konstruktion ist $h_2$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ die mit $2t$ verknüpfte Funktion $h_0$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ und für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ die mit $2t-1$ verknüpfte Funktion $h_1$ auf dem ebenfalls abgeschlossenen Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$. Betrachte nun noch die kritische Stelle $t = \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl} \lim_{t\to\frac{1}{2}-} h_2(x,t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}-} h_0(x,2t) = h_0(x, \lim_{t\to\frac{1}{2}-} 2t) = h_0(x,1) & = & g_1(x) \\ \lim_{t\to\frac{1}{2}+} h_2(x,t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}+} h_1(x,2t-1) = h_1(x, \lim_{t\to\frac{1}{2}+} 0) = h_0(x,1) & = & g_1(x) \end{array}$$

für alle $x \in X$. Folglich ist $h_2$ stetig und damit ist $h_2 : g_0 \simeq g_2$.

□

—

**Definition**. (*Homotopieklassen*)
Sei $f$ eine stetige Abbildung aus $C(X,Y)$. Dann bezeichnet

$$[f] := \{g \in C(X,Y) \mid g \simeq f\}$$

die Homotopieklasse von $f$. Mit

$$[X,Y] := \{[f] \mid f \in C(X,Y)\}$$

bezeichnen wir die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen von $X$ nach $Y$.

—

**Definition**. (*nullhomotop*)
Sei $f \in C(X,Y)$. Dann heißt $f$ nullhomotop, wenn es eine konstante Abbildung $c : X \longrightarrow Y, c(x) \equiv y_0$, gibt die zu $f$ homotop ist.

Vereinbarung: fortan schreiben wir für eine solche konstante Abbildung $c : X \longrightarrow Y$ mit $c(x) \equiv y_0$ kurz: $c = c_{y_0}$.

—

## 8.2 Einige Beispiele

**Beispiel 1.**
Seien $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$. Dann sind $f, g$ homotop mittels der Homotopie

$$h(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x).$$

**Beispiel 2.**
Betrachte die stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$. Dann ist $f$ nullhomotop wegen $h : f \simeq c$ mit $c(\mathbb{R}^n) := f(0)$ und $h(x,t) := f((1-t)x)$.

**Beispiel 3.**
Ist $Y$ wegzusammenhängend und sind $f, g : X \longrightarrow Y$ nullhomotope Abbildungen, so ist $f \simeq g$. Es bezeichnet dann $0 \in [X, Y]$ die Homotopieklasse der nullhomotopen Abbildungen.

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist $Y$ wegzusammenhängend, d.h.

$$\forall y_1, y_2 \in Y :\ \exists\, \omega : [0,1] \overset{\text{stetig}}{\longrightarrow} Y$$

mit $\omega(0) = y_1$ und $\omega(1) = y_2$.
Überdies seien nun $f$ und $g$ nullhomotop, d.h. $f \simeq c_{y_0}$ und $g \simeq c_{y_0'}$ für ein fixiertes $y_0 \in Y$ und $y_0' \in Y$. Es ist also zu zeigen, dass wir die beiden konstanten Abbildungen im Sinne der Homotoperelation miteinander identifizieren können, d.h. es bleibt zu zeigen, dass:

$$c_{y_0} \simeq c_{y_0'},$$

denn dann folgt wegen der Symmetrie der Homotoperelation, dass $f \simeq c_{y_0} \simeq c_{y_0'} \simeq g$.
Man betrachte dazu die Homotopie $h(x,t) := \omega(t)$, wobei $\omega$ der stetige Weg zwischen $y_0$ und $y_0'$ ist, d.h. $\omega(0) = y_0$ und $\omega(1) = y_0'$. Damit ist dann $h(x, 0) = y_0$ und $h(x, 1) = y_0'$, d.h. $h$ erfüllt das Geforderte und es gilt: $h : c_{y_0} \simeq c_{y_0'}$.

□

Damit ist also in Beispiel 1 $[X, \mathbb{R}^n] = 0$ und genauso für wegzusammenhängende $Y$ auch $[\mathbb{R}^n, Y] = 0$ in Beispiel 2.

**Beispiel 4.**
Ist $f \in C(X, S^n)$ aber *nicht* surjektiv, so ist $f$ nullhomotop.

**Beweis:** Nach Voraussettung ist $f$ nicht surjektiv. Damit finden wir einen Punkt $y_0 \in S^n \setminus \operatorname{bild}(f)$. Dann ist aber

$$0 \notin \overline{-y_0 f(x)} \subset \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in X,$$

da ansonsten $y_0 = f(x)$ wäre (man mache sich dies für $n = 1$ klar). Dann ist aber die Abbildung $h : X \times [0,1] \longrightarrow S^n$ mit

$$h(x,t) := \frac{(1-t)f(x) - ty_0}{||(1-t)f(x) - ty_0||}$$

wohldefiniert auf ganz $X$. Dann gilt aber $h(x,0) = \frac{f(x)}{||f(x)||} = f(x)$, da $f(x) \in S^n$ und damit $||f(x)|| = 1$ und außerdem $h(x,1) = \frac{-y_0}{||y_0||} = -y_0 = c_{-y_0}$. Also ist $f$ nullhomotop zu $c_{-y_0}$ mittels der Homotopie $h$.

□

—

**Bemerkung**. (*Zusammensetzungen und Produkte homotoper Abbildungen*)

(i) Seien $X, Y, Z$ topologische Räume und

$$X \overset{f \simeq g}{\longrightarrow} Y \overset{\hat{f} \simeq \hat{g}}{\longrightarrow} Z,$$

so sind auch die Zusammensetzungen $\hat{f} \circ f$ und $\hat{g} \circ g$ homotop.

(ii) Sind $f_i, g_i \in C(X,Y)$ homotope Abbildungen: $f_i \simeq g_i$ für $i = 1,2$, so sind auch die Produkte $f_1 \times f_2$ und $g_1 \times g_2$ von $X_1 \times X_2$ nach $Y_1 \times Y_2$ homotop.

**Beweis:** Nach Voraussetzung sind $h_1 : f \simeq g,\ h_2 : \hat{f} \simeq \hat{g}$.

(i) Man betrachte nun die (offensichtlich stetigen) Abbildungen $h^* : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ und $\hat{h}^* : X \times [0,1] \longrightarrow Z$, welche definiert sind als

$$\begin{aligned} h^*(x,t) &= \hat{f}(h_1(x,t)), \\ \hat{h}^*(x,t) &= h_2(g(x),t). \end{aligned}$$

Dann vermögen diese Abbildungen aber Homotopien:

$$\begin{aligned} h^* &: \hat{f} \circ f \simeq \hat{f} \circ g, \\ \hat{h}^* &: \hat{f} \circ g \simeq \hat{g} \circ g. \end{aligned}$$

Wie wir zeigen konnten ist nun aber die Homotopierelation eine Äquivalenzrelation, mithin reflexiv und transitiv und es folgt die Behauptung wegen

$$\hat{f} \circ f \overset{h^*}{\simeq} \hat{f} \circ g \simeq \hat{f} \circ g \overset{\hat{h}^*}{\simeq} \hat{g} \circ g.$$

(ii) Es ist $f_1 \times f_2 \simeq g_1 \times g_2$ mittels Homotopie $h(x,t) := (h_1(x_1,t), h_2(x_2,t))$ und $x = (x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$.

□

—

## 8.3 Homotopieäquivalenz und Homotopietyp

Zum Einstieg sei an die Definition des Homöomorphismus erinnert. Eine Abbildung $f$ heißt Homöomorphismus gdw. $f$ bijektiv ist und $f$ und $f^{-1}$ stetig sind. Eine andere, aber äquivalente Beschreibung der Homöomorphie ist die folgende

**Bemerkung**. (*Homöomorphie*)
Sei $f \in C(X, Y)$. Dann ist $f$ ein Homöomorphismus von $X$ nach $Y$ gdw. ein $g \in C(Y, X)$ ex. mit $fg = \mathrm{id}_Y$ und $gf = \mathrm{id}_X$.

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass $f$ bijektiv ist gdw. $fg = \mathrm{id}_Y$ und $gf = \mathrm{id}_X$.

$\Rightarrow$) Injektivität: es gilt $gf = \mathrm{id}_X \Leftrightarrow (\forall\ x_1, x_2 \in X \Rightarrow g(f(x_1)) = x_1$ und $g(f(x_2)) = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \Leftrightarrow f$ ist injektiv.
Surjektivität: es gilt $fg = \mathrm{id}_Y \Rightarrow f(g(Y)) = Y \Leftrightarrow \forall y \in Y :\ y$ hat das Urbild $g(y) \Rightarrow f$ ist surjektiv.

$\Leftarrow$) Ist nun andererseits $f$ bijektiv, so definiere man eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ durch $g(y) := x$, wobei $x \in X$ das durch $f(x) = y$ eindeutig bestimmte Urbild ist. Dann gilt $gf = \mathrm{id}_X$, sowie $fg = \mathrm{id}_Y$.

□

—

Die Homotopieäquivalenz ergibt sich nun als eine schwächere Formulierung, als diejenige der Homöomorphie, indem wir in der Definition das Gleichheitszeichen durch die Homotopierelation ersetzen.

**Definition**. (*Homotopieäquivalenz*)
Eine stetige Abbildung $f \in C(X, Y)$ heißt eine Homotopieäquivalenz zwischen $X$ und $Y$, wenn es ein Homotopieinverses $g \in C(Y, X)$ gibt, sodass

$$fg \simeq \mathrm{id}_Y \text{ und } gf \simeq \mathrm{id}_X .$$

Dann heißen $X$ und $Y$ homotopieäquivalent oder vom gleichen Homotopietyp.

**Bezeichnung:** $X \simeq Y$.

**Bedeutung:** Augenscheinlich sind also Homöomorphismen Homotopieäquivalenzen, d.h. homöomorphe Räume sind vom gleichen Homotopietyp. Homotopieäquivalenzen geben uns Aussagen über Gemeinsamkeiten topologischer Räume, da eine Reihe topologischer Eigenschaften (z.B. Zusammenziehbarkeit) und algebraischer Objekte (z.B. Fundamentalgruppen) invariant bezüglich Homotopieäquivalenz sind.

—

**Satz 2.**
Die zweistellige Relation

$$\mathcal{R} := \{(X,Y) \mid \text{ex. Homotopieäquivalenz von } X \text{ nach } Y\}$$

ist symmetrisch, reflexiv und transitiv; d.h. Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der topologischen Räume.

**Beweis:** Seien $X, Y, Z$ topologische Räume. Dann verifiziere:

1. Reflexivität: Es ist $X \simeq X$ mit den Homotopieäquivalenzen $f, g := \mathrm{id}_X$.

2. Symmetrie: Es sei $X \simeq Y$ mit $f \in C(X,Y),\ g \in C(Y,X):\ fg \simeq \mathrm{id}_Y$ und $gf \simeq \mathrm{id}_X$. Betrachte
$$\hat{f} := g \text{ und } \hat{g} := f$$
und damit $\hat{f}\hat{g} \simeq \mathrm{id}_X$ und $\hat{g}\hat{f} \simeq \mathrm{id}_Y$ und damit $Y \simeq X$.

3. Transitivität: Es seien $X \overset{f}{\simeq} Y \overset{g}{\simeq} Z$ mit $f\hat{f} \simeq \mathrm{id}_Y$ und $\hat{f}f \simeq \mathrm{id}_X$ sowie $g\hat{g} \simeq \mathrm{id}_Z$ und $\hat{g}g \simeq \mathrm{id}_Y$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rcl} (gf) \circ (\hat{f}\hat{g}) = g \circ (f\hat{f}) \circ \hat{g} \simeq g \circ \mathrm{id}_Y \circ \hat{g} = g\hat{g} & \simeq & \mathrm{id}_Z, \\ (\hat{f}\hat{g}) \circ (gf) = \hat{f} \circ (\hat{g}g) \circ f \simeq \hat{f} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = \hat{f}f & \simeq & \mathrm{id}_X, \end{array}$$
d.h. $X \simeq Z$ mit den Homotopieäquivalenzen $(gf)$ und $(\hat{f}\hat{g})$.

□

—

Wir betrachen nun einen oft benötigten Spezialfall homotopieäquivalenter Räume.

**Definition.** (*Zusammenziehbarkeit*)
Ein topologischer Raum $X$ heißt <u>zusammenziehbar</u>, wenn $x_0 \in X$ ein fixierter Punkt ist und

$$X \simeq \{x_0\},$$

d.h. wenn er zum einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist.

**Anschaulich:** man betrachte z.B. eine sternförmige Menge im $\mathbb{R}^n$:

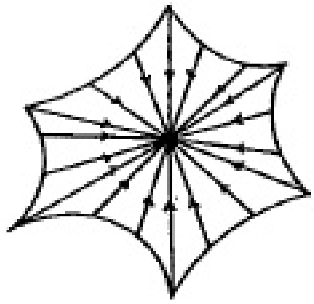

Abbildung 8.1: aus Topologie, Jänich, 8ed, Springer.

Hierbei wird also in der „Zeit“ von $t = 0$ bis $t = 1$ jeder Punkt $x \in X$ stetig längs des Weges $t \mapsto h(x, t)$ in einen festen Punkt $x_0$ deformiert.

**Bemerkung:** Im Falle der Zusammenziehbarkeit vereinfacht sich die Definition dazu, dass es eine Homotopie $h : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ geben muss mit $h : \mathrm{id}_X \simeq c_{x_0}$ — d.h. $X$ ist genau dann zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung von $X$ nullhomotop ist.

Insbesondere ist Zusammenziehbarkeit eine topologische Invariante: jeder zu einem zusammenziehbaren Raum homöomorphe Raum ist auch zusammenziehbar.

**Beispiel:** $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar mit $h(x, t) = (1 - t)x$ mit $\mathrm{id}_X = x$ und $c(X) = c_0 = 0$.

—

## 8.4 Retrakte

In der Topologie stellen sich viele Probleme als Fortsetzungsprobleme dar. D.h. man hat eine stetige Abbildung $f : A \subset X \longrightarrow Y$ und benötigt eine stetige Fortsetzung der Abbildung auf z.B. ganz $X$. In diesem Zusammenhang bieten die nun folgenden Definitionen Möglichkeiten, Kriterien und Hilfsmittel zu finden, um diese Probleme zu lösen.

**Definition**. (*Retrakt*)
Sei $A \subset X$ ein Teilraum von $X$. Dann nennen wir $A$ einen Retrakt von $X$, falls es eine Retraktion $\rho \in C(X, A)$, d.h. eine Abbildung

$$\rho : X \overset{\text{stetig}}{\longrightarrow} A$$

gibt, sodass $\rho(a) = a,\ \forall a \in A$ (d.h. es ist $\rho|_A = \mathrm{id}_A$).

—

Ist nun $\rho$ als Abbildung nach $X$ außerdem homotop zur Identität auf $X$ so ergibt sich der stärkere Begriff des *Deformationsretraktes*.

**Definition**. (*Deformationsretrakt*)
Sei $A \subset X$ ein Teilraum von $X$.
Wir nennen eine Retraktion $\rho \in C(X, X)$ eine Deformationsretraktion, falls

$$\rho : X \overset{\text{stetig}}{\longrightarrow} X,$$

sodass $\mathrm{bild}(\rho) = A$ und $\rho|_A = \mathrm{id}_A$ (Eigenschaften der Retraktion) *und* $h : \rho \simeq \mathrm{id}_X$.
Der Teilraum $A$ heißt Deformationsretrakt von $X$, falls es eine solche Deformationsretraktion $\rho \in C(X, X)$ gibt.
Gilt darüber hinaus noch $h(a, t) = a\ \forall a \in A,\ \forall t \in [0, 1]$, so heißt $\rho$ starke Deformationsretraktion und ensprechend $A$ starker Deformationsretrakt.

**Bemerkung:** in der Literatur heißen starke Deformationsretrakte mitunter auch strenge Deformationsretrakte.

—

Im Folgenden betrachten wir abschließend einige Beispiele für Retrakte.

**Beispiel 1.**
$S^{n-1}$ ist starker Deformationsretrakt von $D^n \backslash \{0\} =: \mathcal{D}$.

**Beweis:** Es ist $S^{n-1} \subset \mathcal{D}$. Man betrachte die Abbildung $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ mit

$$h(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{||x||}.$$

Offensichtlich ist $h$ als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig und es gilt:

$$h(x,0) = x = \mathrm{id}_X \text{ und } h(x,1) = \frac{x}{||x||}.$$

Daher wählen wir als Deformationsretraktion die stetige Abbildung $\rho : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ mit $\rho(x) = \frac{x}{||x||}$. Dann gilt $\rho|_{S^{n-1}} = x = \mathrm{id}_X$ da dann $||x|| = 1$. Damit ist dann $h : \rho \simeq \mathrm{id}_X$, also $S^{n-1}$ ein Deformationsretrakt von $\mathcal{D}$. Außerdem gilt aber

$$h|_{S^{n-1}}(x) = (1-t)x + \frac{tx}{||x||} = (1-t)x + tx = x - tx + tx = x = \mathrm{id}_X.$$

Also ist $S^{n-1}$ insbesondere auch starker Deformationsretrakt von $\mathcal{D}$.

$\square$

**Beispiel 2.**
Allgemeiner: verklebt man einen topologischen Raum $X$ mit $D^n \backslash \{0\}$, so entsteht ein neuer, zu $X$ homotopieäquivalenter, Raum.

—