Der „Satz vom Affen“ und sein Beweis

Daniel Schliebner

Was verbirgt sich hinter dieser Überschrift? Spezifiziert besagt er: „Die Menge aller Wörter über einem gegebenen Alphabet ist abzählbar“. Weil man dann alle Werke der Welt aus Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft auflisten könnte und in dieser Liste somit auch Stücke von Shakespeare oder Goethe enthalten wären, nennt man diesen Satz den „Satz vom Affen“:

„Die Menge aller Wörter über einem gegebenen Alphabet ist abzählbar“

Beweis. Wir nennen $W := \Gamma^*$ die Menge aller Wörter, die man über einem gegebenen *endlichen* Alphabet $\Gamma = \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$ bilden kann. Also im Prinzip jedes Wort, jede Wortgruppe, jeder Satz usw. der jemals geschrieben wurde oder noch wird. Nun beschreibe $|\Gamma| = \nu$ die *Kardinalität* dieser Menge. Weiterhin sei

$$o : \Gamma \overset{\text{bijektiv}}{\longrightarrow} \{\ a \mid a \in [1, \nu]\ \}$$

die bijektive Funktion, welche jedem Element aus dem Alphabet A eine Stelle zuordnet, an der es im Alphabet auftritt (z.B. $o(a_9) = 9$). Sei nun $w \in W$ ein beliebiges Wort, dann hat w eine natürliche Länge $|w| = n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$w = a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n,\ \ a_i \in \Gamma\ \forall\ i \in [1, \nu]$$

Wobei a_i natürlich die Zeichen aus dem gegebenen Alphabet sind. Nun definieren wir uns eine Funktion $\Phi : W \to \mathbb{N}$ durch

$$\Phi(w) = \Phi(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n) = \sum_{i=1}^{n} o(a_i) \cdot (|\Gamma| + 1)^i$$

Wir zeigen vorerst, dass $\Phi(w)$ *injektiv* ist. Wir wissen, dass stets gilt:

$$\Phi(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n) = \sum_{i=1}^{n} o(a_i) \cdot (\nu + 1)^i < (\nu + 1)^{n+1}$$

Nun betrachten wir zwei beliebige Wörter $r, s \in W$. Sind diese Wörter unterschiedlich lang, so gilt nach obiger Gleichung $\Phi(r) \neq \Phi(s)$. Weiterhin sei $|r| = |s|$ und $\Phi(r) = \Phi(s)$ mit $r = r_1\ r_2\ r_3\ \ldots\ r_n$ und $s = s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_n$ für ein $n \geq 0$ so gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} o(r_i) \cdot (\nu + 1)^i = \sum_{i=1}^{n} o(s_i) \cdot (\nu + 1)^i$$

und folglich

$$\sum_{i=1}^{n} [o(r_i) - o(s_i)] \cdot (\nu + 1)^i = 0.$$

Dies kann nur gelten, wenn $[o(r_i) - o(s_i)] = 0 \ \forall i$. Da $o(x)$ nach Definition bijektiv ist, muss für alle r_i und s_i gelten, dass diese gleich sind. Somit kann die Gleichheit von $\Phi(r)$ und $\Phi(s)$ nur gelten, wenn auch r und s gleich sind. Folglich ist $\Phi(w)$ injektiv.

Nun betrachten wir uns das volle Bild $\Phi(W)$. Da W eine unendliche Menge ist, muss es auch $\Phi(W)$ sein (wir haben ja gezeigt, dass $\Phi(W)$ injektiv ist). Aus dem Satz, dass *jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge auch abzählbar ist (→ siehe Nachtrag)* folgt nun, dass eben $\Phi(W)$ abzählbar unendlich ist (denn es gilt ja $\Phi(W) \subset \mathbb{N}$). Im Rückschluss auf W folgern wir nun dass W schließlich abzählbar unendlich sein muss, weil ja gilt: $|W| = |\Phi(W)|$. Wir haben also gezeigt, dass man die Menge aller Wörter, (d.h. Sätze, Texte, Bücher usw.) „abzählen“ kann.

□

Nachtrag

Noch zu zeigen ist, dass jede unendliche Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge auch abzählbar ist. Dies folgt nun:

Satz. Jede unendliche Teilmenge A einer abzählbaren unendlichen Menge M ist abzählbar und es gilt:

$$\exists \ g : A \xrightarrow{\text{bijektiv}} \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir wissen:

$$\exists \ f : M \xrightarrow{\text{bijektiv}} \mathbb{N}.$$

Es sei also $A \subseteq M$. Betrachten wir nun die gesuchte Abbildung g, für die gilt:

$$g : A \xrightarrow{\text{bijektiv}} \mathbb{N}$$

Wir wissen, dass jedes $m \in M$ genau einem $f(m)$ zugeordnet ist. Nun gilt auch:

$$\forall a \in A : a \in M.$$

Daher existiert eine Abbildung g, die jedem Element $a \in A$ ein $g(a)$ folgendermaßen zuordnet:

$$g(a) = f(a), \text{ d.h. definiere } g := f|_A.$$

Aus

$$\exists \ g : A \xrightarrow{\text{injektiv}} \mathbb{N}$$

folgt nun sofort $|A| \leq |\mathbb{N}|$, wobei nur der Gleichheitsfall gelten kann, da es keine unendliche Menge gibt, die eine kleinere Kardinalität besitzt als die der natürlichen Zahlen. Es folgt daher

$$|A| = |\mathbb{N}|$$

und somit ist die Existenz der gesuchten bijektiven Abbildung g für den Fall $A \subset M$ bewiesen. Im Spezialfall $A = M$ ist trivial, dass die Abbildung g gerade der Abbildung f entspricht.

□