Lie-Gruppen und Lie-Algebren
Eine Einführung

Sommersemester 2009
an der Humboldt Universität zu Berlin.

Daniel Schliebner

Herausgabe: 26. September 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Das vorliegende Skript soll eine kurze und kompakte Einführung in die Grundbegriffe zur Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren geben.

Zur Klärung dieser Begriffe beginnen wir im ersten Teil mit grundlegenden Definitionen. Voraussetzung zum Verständnis des besprochenen Stoffes sind dabei Grundkenntnisse in der Analysis auf Mannigfaltigkeiten, denn eine Lie-Gruppe G ist im Wesentlichen eine topologische Gruppe, welche eine glatte Struktur trägt; ein erstes Beispiel für eine Lie-Gruppe ist etwa die lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ über einem Körper $\mathbb{K}$.
Im zweiten Teil werden wir einer Lie-Gruppe eine weitere algebraische Struktur zuordnen, welche wir Lie-Algebra nennen wollen (unter einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ verstehen wir einen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer speziellen bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$). Insbesondere werden wir sehen, dass die beiden Begriffe der Lie-Gruppe und der Lie-Algebra eng miteinander zusammenhängen (Satz von Ado).
Der dritte Teil wird sich mit der Einführung der Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ befassen, welche eine elegante Möglichkeit bietet, Probleme, welche sich auf Lie-Gruppen beziehen, in die Theorie der Lie-Algebren zu übersetzen.
Betrachten wir eine Lie-Untergruppe H zu G, so stellt sich die Frage, wie die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ mit derjenigen von $\mathfrak{g}$ zusammenhängt. Ziel des vorletzten Abschnittes ist daher die Klärung dieser Frage.
Zuletzt werden wir den Satz von Ado zitieren (aber auf den Beweis nur verweisen) und eine interessante Folgerung daraus betrachten.

Warum beschäftigt man sich mit diesen algebraischen Objekten mit analytischer Struktur? Wir werden sehen, dass Kandidaten für Lie-Gruppen bekannte Untergruppen der bereits angesprochenen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ sind. Das Studium dieser Mannigfaltigkeiten ist daher wesentlich zum Verständnis und zur (geometrischen) Klassifikation analytischer Objekte (z. B. symmetrischer oder homogener Räume). Analytisch interessant sind Lie-Gruppen und Lie-Algebren insbesondere auch deshalb, weil sich mithilfe von ihnen auch rein analytische Probleme lösen lassen (z. B. die Berechnung von Operatorspektren). Zuletzt ergibt sich durch die Darstellungstheorie, auf welche in diesem Skript nicht weiter eingegangen wird, ein weiteres Hilfsmittel um Zusammenhänge zwischen Räumen und geometrischen Objekten besser verstehen zu können.

2. Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Grundbegriffe einführen und Beispiele für diese geben.

Definition 1 *Eine **Lie-Gruppe** G ist eine Mannigfaltigkeit G, welche zusammen mit einer glatten Operation*

$$G \times G \ni (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2 \in G$$

eine Gruppe ist.

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ stets einen Körper, G eine Lie-Gruppe und $e \in G$ das Einselement der Lie-Gruppe.

Beispiel 1

1. *Die Gruppe $(S^1, \cdot)$ mit $S^1 \subset \mathbb{C}$ und komplexer Multiplikation „$\cdot$“.*
2. *Die lineare Gruppe* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *über einem Körper* $\mathbb{K}$.
3. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
4. $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.
5. $\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = E \text{ und } \det A = 1\}$.
6. $G := \{q \in \mathbb{H} \mid \det q = 1\} \cong S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ *für die Gruppe der Quaternionen* $\mathbb{H}$.

Definition 2 *Eine $\mathbb{K}$-**Lie-Algebra** ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathfrak{g}$, zusammen mit einer Operation*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

*(der sog. **Lie-Klammer**) mit folgenden Eigenschaften:*

1. $[\cdot, \cdot]$ *ist bilinear,*
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(Antisymmetrie),*
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(Jacobi-Identität).*

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Beispiel 2 *Wir betrachten den n^2-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum*

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n \times n}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})})$$

mit $[A, B]_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})} := AB - BA$. Dann wird $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ eine Lie-Algebra der Dimension n^2.

Natürlich gibt es nicht nur endlich dimensionale Lie-Algebren. Ein Beispiel für eine Lie-Algebra unendlicher Dimension ist z. B. der Vektorraum der glatten Vektorfelder, wie folgendes Beispiel illustriert.

Beispiel 3 *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann wird der Vektorraum*

$$\mathfrak{X}(M) := \{X : M \to TM \text{ glattes Vektorfeld auf } M\}$$

eine unendlich dimensionale Lie-Algebra vermöge dem Vektorfeld-Kommutator als Lie-Klammer, d. h. sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte und

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Basisdarstellungen von X und Y, so setzen wir

$$[X, Y] := \sum_{k=1}^{n} (X(\eta^k) - Y(\xi^k)) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Das Beispiel 2 ist ein Spezialfall des folgendes Beispiels.

Beispiel 4 *Sei $(\mathcal{A}, \star)$ eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra (d. h. ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{A}$ zusammen mit einer $\mathbb{K}$-bilinearen Verknüpfung $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, welche assoziativ ist). Dann wird $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra vermöge $[a_1, a_2] := a_1 \star a_2 - a_2 \star a_1$.*

Wir wollen nun drei grundlegende Morphismen in der Kategorie der Lie-Algebren definieren.

Definition 3 *Seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ $\mathbb{K}$-Lie-Algebren mit Kommutator $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_1}$ bzw. $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_2}$. Ein **Lie-Algebren-Homomorphismus** ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung*

$$\varphi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$$

*mit der Eigenschaft $\varphi([X, Y]_{\mathfrak{g}_1}) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_{\mathfrak{g}_2}$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}_1$. Die Begriffe des **Lie-Algebren-Isomorphismus** und **-Automorphismus** übertragen sich auf kanonische Weise.*

Zuletzt erklären wir den Begriff der Lie-Unteralgebra. Im vorletzten Abschnitt wollen wir untersuchen, wie dieser Begriff mit einer Lie-Untergruppe zusammenhängt; die Definition einer solchen Untergruppe führen wir aber erst im angesprochenen Abschnitt ein.

Definition 4 *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein linearer Unterraum. Dann heißt $\mathfrak{h}$ **Lie-Unteralgebra** von $\mathfrak{g}$, falls gilt:*

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}.$$

*Gilt darüber hinaus $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$, so heißt $\mathfrak{h}$ ein **Ideal** von $\mathfrak{g}$.*
Ideale und Lie-Unteralgebren sind selbst wieder Lie-Algebren mit der durch $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ induzierten Lie-Klammer.

Zur Konstruktion von Lie-Algebren zu einer vorgegebenen Lie-Gruppe G benötigen wir schließlich noch den Begriff der Linkstranslation L_g (bzw. Rechtstranslation R_g) zu einem Element $g \in G$. Dies führt uns dann auf den zentralen Begriff der linksinvarianten Vektorfelder.

Definition 5 *Sei G eine Lie-Gruppe und $g \in G$ ein Element aus G. Der Diffeomorphismus*

$$L_g : x \in G \longmapsto g \cdot x \in G$$

*(bzw. $R_g : x \in G \longmapsto x \cdot g \in G$) heißt **Linkstranslation** (bzw. **Rechtstranslation**).*

3. Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Ist $F : G \to G$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathfrak{X}(G)$, so wird $dF(X)$ definiert vermöge

$$dF(X)(x) := dF_{F^{-1}(x)}X(F^{-1}(x))$$

für $x \in G$ ein Vektorfeld und es gilt

$$dF([X, Y]) = [dF(X), dF(Y)] \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

Hierbei bezeichnet $[\cdot, \cdot]$ den Vektorfeld-Kommutator, welchen wir in Beispiel 3 definiert haben. In diesem Beispiel haben wir gesehen, dass $\mathfrak{X}(G)$ eine Lie-Algebra wird. Wir wollen nun einen speziellen Unterraum von $\mathfrak{X}(G)$ betrachten.

Definition 6 *Sei G eine Lie-Gruppe und $L_g : G \longrightarrow G$ die Linkstranslation. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ heißt **linksinvariant**, falls gilt:*

$$dL_g(X) = X$$

für alle $g \in G$. Der Vektorraum

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \textit{ ist linksinvariant}\}$$

*mit dem Vektorfeld-Kommutator heißt **Lie-Algebra der Lie-Gruppe** G.*

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{g}$ in der Tat eine Lie-Algebra definiert.

Bemerkung 1 *Sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ zwei linksinvariante Vektorfelder, so ist auch $[X, Y]_{\mathfrak{g}}$ linksinvariant.*

Beweis: Die Linkstranslation L_g ist ein Diffeomorphismus. Nach den Bemerkungen zu Beginn dieses Abschnittes folgt:

$$dL_g([X, Y]) = [dL_g(X), dL_g(Y)] = [X, Y],$$

da X, Y linksinvariante Vektorfelder sind, d. h. es gilt $dL_g(X) = X$ bzw. $dL_g(Y) = Y$. $\square$

Bemerkung 2 *Ein linksinvariantes Vektorfeld $X : G \to TG$ auf einer Lie-Gruppe G ist bereits durch seinen Wert bei $e \in G$ determiniert. Insbesondere können wir den Tangentialraum an G in $e \in G$ mit $\mathfrak{g}$ identifizieren:*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \text{ ist linksinvariant}\} \cong T_eG.$$

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Lie-Gruppe G und $g \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$X(g) = dL_g(X)(g) \overset{\text{Def}}{=} (dL_g)_{L_g^{-1}(g)} X(L_g^{-1}(g)) = (dL_g)_e X(e) \in T_gG.$$

für $(dL_g)_e : T_eG \longrightarrow T_gG$. Eine Identifizierung erhalten wir dann durch:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & T_eG \\ X & \longmapsto & X(e) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} T_eG & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ X & \longmapsto & (dL_g)_e(X) \end{array}.$$

Sind $x, y \in T_eG$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ linksinvariant mit $X(e) = x, Y(e) = y$, so übertragen wir den Kommmutator in $\mathfrak{g}$ auf T_eG vermöge $[x, y]_{T_eG} := [X, Y]_{\mathfrak{g}}(e)$. □

Als Ergebnis erhalten wir nun zwei mögliche Interpretationen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu einer Lie-Gruppe G:

- $\mathfrak{g}$ ist der Raum aller linksinvarianten Vektorfelder auf G.
- $\mathfrak{g}$ ist der Tangentialraum T_eG an G in $e \in G$.

Mithilfe der zweiten Beschreibung wollen wir nun zwei Lie-Algebren explizit berechnen. Hierzu sei daran erinnert, dass $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ aufgefasst als $\binom{n}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit (siehe Anhang) und $\mathrm{SU}(n)$ aufgefasst als $(n^2 - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Lie-Gruppen sind.

Satz 1 *Es bezeichne $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra zu $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, sowie $\mathfrak{su}(n)$ die Lie-Algebra zur Lie-Gruppe $\mathrm{SU}(n)$. Dann gilt:*

1. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \cong \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$.
2. $\mathfrak{su}(n) \cong \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid X + \overline{X}^T = 0\}$.

Beweis: Sei $E \in GL(n, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix. Als Konsequenz der Bemerkung 2 wissen wir, dass gilt:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \cong T_E(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})).$$

Wir nutzen diese Identität um mithilfe der bekannten Beschreibung über Elemente aus dem Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit die Lie-Algebra zu berechnen. Sei dazu also $X \in T_E(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}))$ und

$$A : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$$

eine Kurve in $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ mit $A(0)=E$ und $A'(0)=X$. Dann gilt: $A(t)A^T(t)=E$ für alle $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Differentitation in $t=0$ ergibt:

$$0=\frac{d}{dt}[A(t)A^T(t)]_{t=0}=A'(0)\cdot E+E\cdot(A')^T(0)=X+X^T.$$

Dies zeigt $T_E(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}))\subseteq\{X\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\mid X+X^T=0\}=:\mathfrak{g}$. Aus Dimensionsgründen gilt die Gleichheit da

$$\dim\{X\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\mid X+X^T=0\}=\binom{n}{2}$$

(die schiefsymmetrischen Matrizen sind durch ihre Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen vollständig determiniert). Analog zeigt man $\mathfrak{su}(n)\cong\{X\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\mid X+\overline{X}^T=0\}$. Es bleibt zu zeigen, dass der auf $T_E(SO(n,\mathbb{R}))$ gegebene Kommutator mit dem in $\mathfrak{g}$ überein stimmt. $\square$

Analog kann man zeigen, dass gilt:

Satz 2 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\cong T_E(\mathrm{SL(n,\mathbb{R})})=\{X\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\mid\mathrm{Tr}(X)=0\}$.

4. Die Exponentialabbildung

Betrachten wir den Spezialfall $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^{n\times n}$ und $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Hier kennen wir aus der Analysis bereits eine Exponentialabbildung

$$\exp:\mathfrak{g}\longrightarrow G$$

definiert durch

$$\exp(A):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!},\ A^0:=E.$$

(Konvergenz betrachten wir hier bezüglich der induzierten Operatornorm/Matrixnorm im $\mathbb{R}^{n\times n}$). Ziel dieses Abschnittes ist es, diesen Sachverhalt für allgemeine Lie-Gruppen G und ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu verallgemeinern.

Definition 7 *Sei $(G,\cdot)$ eine (Lie-)Gruppe. Unter einer (stetigen) 1-parametrigen Untergruppe $\{\phi(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\subset G$ verstehen wir einen (stetigen) Homomorphismus $\phi:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(G,\cdot)$ der Gruppen.*

Sei nun $X\in\mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld und $\phi_X(t):\mathbb{R}\longrightarrow G$ dessen maximale Integralkurve (man beachte, dass ϕ_X für linksinvariante Vektorfelder auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist; siehe Satz 3) zur Anfangsbedingung $\phi_X(0)=e\in G$, d. h. es gelte

$$(\mathscr{D})\ \begin{cases}\phi'_X(t)=X(\phi_X(t)),\\ \phi_X(0)=e.\end{cases}$$

Dann ist $(\mathscr{D})$ lokal (d. h. innerhalb einer zulässigen Karte) eine autonome ODE. Für linksinvariante Vektorfelder lässt sich insbesondere folgender Satz zeigen.

Satz 3 *Sei $X \in \mathfrak{g}$ linksinvariant und ϕ_X die maximale Integralkurve mit Anfangsbedingung $\phi_X(0) = e \in G$. Dann gilt:*

1. *ϕ_X ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*
2. *$\{\phi_X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine 1-parametrige Untergruppe von G, d. h. es gilt: $\phi_X(t_1 + t_2) = \phi_X(t_1) \cdot \phi_X(t_2)$ und $\phi_X(0) = e$.*
3. *$\phi_{sX}(t) = \phi_X(s \cdot t)\ \forall s, t \in \mathbb{R}$.*

Beweis: siehe [1, Seite 5 f.]. □

Mithilfe dieser Erkenntnis können wir nun die Exponentialabbildung definieren.

Definition 8 *Die Abbildung* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *definiert vermöge*

$$\exp(X) := \phi_X(1)$$

*heißt **Exponentialabbildung**.*

Betrachten wir einmal das Differential von exp in $0 \in \mathfrak{g}$; wir erhalten so einen Endomorphismus auf $\mathfrak{g}$ durch folgende Identifizierungen:

$$(d\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_{\exp(0)}G = T_eG \cong \mathfrak{g}.$$

Der folgende Satz macht nun deutlich, welche Bedeutung die Exponentialabbildung hat. Es gilt nämlich:

Satz 4 $(d\exp)_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Beweis: Sei $X \in T_0(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$. Dann ist $\gamma : t \mapsto t \cdot X$ eine Kurve in $\mathfrak{g}$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma'(0) = X$. Es folgt:

$$(d\exp)_0(X) = \frac{d}{dt}[\exp(0 + tX)]_{t=0} = \frac{d}{dt}[\phi_{tX}(1)]_{t=0} = \frac{d}{dt}[\phi_X(t)]_{t=0} = X(e).$$

Da X linksinvariant ist, greift die Identifizierung $T_eG \cong \mathfrak{g}$ und es folgt die Behauptung. □

Nach dem Satz über den lokalen Diffeomorphismus folgt daraus inbesondere, dass exp um $0 \in \mathfrak{g}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, d. h. es existieren $0 \in U \subset \mathfrak{g}$ und $V \subset G$, sodass

$$\exp : U \longrightarrow V$$

ein Diffeomorphismus ist. Dies gibt uns z. B. die Möglichkeit, mithilfe der Exponentialabbildungen Koordinaten auf einer Lie-Gruppe G einzuführen (sogenannte Normalkoordinaten).

Schließlich benutzen wir die Exponentialabbildung nun, um eine weitere Interpretation von Lie-Algebren zu erhalten. Dies ist eine Folgerung aus dem folgenden Satz.

Satz 5 *Sei $\{\phi(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine 1-parametrige stetige Untergruppe der Lie-Gruppe G. Dann existiert ein $X \in \mathfrak{g}$ mit*

$$\phi(t) = \exp(t \cdot X) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist ϕ ein glatter Gruppenhomomorphismus.

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma.

Lemma 1 *Sei $(K, +)$ eine nicht-triviale additive Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Dann ist entweder $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Z}a$ (wobei $a > 0$ das kleinste Element aus K ist) oder aber K liegt dicht in $\mathbb{R}$.*

Beweis: siehe [2, Seite 67 f.]. □

Beweis von Satz 5: Wir fixieren um $0 \in \mathfrak{g}$ eine Umgebung $V \subset \mathfrak{g}$, sodass

$$\exp|_{2V} : 2V \longrightarrow G$$

ein Diffeomorphismus ist. Es bezeichne $W := \exp(V) \subset G$, insbesondere ist also $e \in W$. Da ϕ stetig ist und $\phi(0) = e$ gilt, existiert nun ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\phi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset W.$$

Ferner existiert ein $X \in \mathfrak{g}$ mit $\exp(X) = \phi(\varepsilon)$. Man betrachte nun

$$f(t) := \exp(\varepsilon^{-1} t X)$$

und die Untergruppe $K := \{t \in \mathbb{R} \mid \phi(t) = f(t)\}$. Dann gilt:

a) $0, \varepsilon \in K$ nach Konstruktion.

b) $(K, +)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$, da $\phi, f : \mathbb{R} \longrightarrow G$ stetige Gruppenhomomorphismen sind.

Aus b) und Lemma 1 folgt, dass $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Z}a$, $a > 0$ gilt. Angenommen es wäre $K = \mathbb{Z}a$, wobei $a > 0$ das kleinste Element aus K sei, d. h. es gelte $\phi(a) = f(a)$. Dann gilt aber auch $\frac{a}{2} \in K$, denn wegen

$$f^2\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = f(a) = \phi(a) = \ldots = \phi^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

gilt auch

$$2\exp^{-1}\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \varepsilon^{-1} a X = \exp^{-1}(\exp((2\varepsilon)^{-1} a X + (2\varepsilon)^{-1} a X)) = 2\exp^{-1}\left(\phi\left(\frac{a}{2}\right)\right).$$

Da aber $\exp|_{2V}$ ein Diffeomorphismus ist, folgt $f\left(\frac{a}{2}\right) = \phi\left(\frac{a}{2}\right)$. Dies impliziert $\frac{a}{2} \in K$, was ein Widerspruch zur Minimalität von $a > 0$ ist.

□

Folgerung 1 *Jede 1-parametrige Untergruppe einer Lie-Gruppe G wird durch ein Element $X \in \mathfrak{g}$ erzeugt und hat die Gestalt $\{\exp(tX)\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Folgerung 2 *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ zwischen Lie-Gruppen G_1 und G_2 ist glatt.*

Beweis: siehe [1, Seite 10 f.]. □

Definition 9 *Sei $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ein stetiger Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen und $\mathfrak{g}_1$ bzw. $\mathfrak{g}_2$ die zu G_1 bzw. G_2 gehörige Lie-Algebra. Die Zuordnung*

$$\varphi_* := d\varphi_e : X \in \mathfrak{g}_1 \longmapsto \varphi_* X \in \mathfrak{g}_2,$$

*heißt **Differential von** φ. D. h. $\varphi_* X \in \mathfrak{g}_2$ das durch den Vektor $d\varphi_e(X(e))$ eindeutig definierte linksinvariante Vektorfeld (es gilt $(\varphi_* X)(e) = d\varphi_e(X(e))$).*

Folgerung 3 *Sei $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt*

$$\varphi \circ \exp_{\mathfrak{g}_1} = \exp_{\mathfrak{g}_2} \circ \varphi_*.$$

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}_1$ und $\gamma : t \longmapsto \varphi(\exp_{\mathfrak{g}_1}(tX))$ eine Kurve in G_2 mit $\gamma(0) = e_2$, wobei $e_i, i = 1, 2$ das neutrale Element von G_i bezeichne. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(\exp(tX)) \overset{\text{KR}}{=} d\varphi_{\exp(tX)}(\exp'(tX)) \\
&\overset{\text{Def}}{=} d\varphi_{\exp(tX)}(X(\exp(tX))) \overset{\text{Bem 2}}{=} d\varphi_{\exp(tX)}((dL_{\exp(tX)})_{e_1}(X(e_1))) \\
&\overset{\text{KR}}{=} d(\varphi \circ L_{\exp(tX)})_{e_1}(X(e_1)) \overset{!}{=} d(L_{\varphi(\exp(tX))} \circ \varphi)_{e_1}(X(e_1)) \\
&\overset{\text{KR}}{=} (dL_{\varphi(\exp(tX))})_{e_2}(d\varphi_{e_1}(X(e_1))) = (\varphi_* X)(\varphi(\exp(tX))) = (\varphi_* X)(\gamma(t)),
\end{aligned}$$

d. h. γ ist die Integralkurve zum linksinvarianten Vektorfeld $\varphi_* X$ durch $e_2 \in G_2$. Nach Definition der Exponentialabbildung folgt daraus

$$\exp_{\mathfrak{g}_2}(\varphi_* X) = \gamma(1) = \varphi(\exp_{\mathfrak{g}_1}(X)).$$

□

Satz 6 *Sei $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist $\varphi_* : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow g_2$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus.*

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}_1$. Die Vektorfelder X und $\varphi_*(X)$ φ-verknüpft, d. h. es gilt

$$\varphi_*(X)(\varphi(e)) = \varphi_*(X)(e) = d\varphi_e(X(e)).$$

Für den Vektorfeld-Kommutator folgt für $X, Y \in \mathfrak{g}_1$:

$$d\varphi_e([X, Y]_{\mathfrak{g}_1}(e)) = [\varphi_*(X), \varphi_*(Y)]_{\mathfrak{g}_2}(\varphi(e)) = [\varphi_*(X), \varphi_*(Y)]_{\mathfrak{g}_2}(e).$$

Damit ist $\varphi_*([X, Y]_{\mathfrak{g}_1})$ dasjenige linksinvariante Vektorfeld mit

$$\varphi_*([X, Y]_{\mathfrak{g}_1})(e) = d\varphi_e([X, Y]_{\mathfrak{g}_1}(e)) = [\varphi_*(X)(e), \varphi_*(Y)(e)]_{\mathfrak{g}_2}.$$

□

Satz 7 *(Eigenschaften der Exponentialabbildung)*
Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt für die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$:

1. $\exp(0) = e$,
2. $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$,
3. $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$,

Beweis: folgt direkt aus Satz 3. □

5. Lie-Untergruppen und Lie-Unteralgebren

Wir wollen zunächst definieren, was wir unter einer Lie-Untergruppe zu verstehen haben. In der Literatur werden dazu häufig nicht einheitliche Definitionen aufgeführt, welche den Begriff der Lie-Untergruppe oft in reduntantem Sinne verwenden. Wir geben daher drei mögliche Definitionen einer Lie-Untergruppe und unterscheiden diese begrifflich durch zusätzliche Adjektive. Es sei angemerkt, dass die nun folgenden Definitionen untereinander *nicht* isomorph sind. So gibt es etwa Lie-Untergruppen, welche keine topologischen Lie-Untergruppen sind (etwa $\{(e^{i\alpha t, e^{it}}) \in S^1 \times S^1 : t \in \mathbb{R}\} \subset T^2$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als Lie-Untergruppe des Torus T^2; siehe [3, Seite 379]). Insbesondere ist jede topologische Lie-Untergruppe abgeschlossen.

Definition 10 *Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe (im algebraischen Sinne). Dann heißt H*

(A) eine ***topologische Lie-Untergruppe*** *von G, falls H mit der durch G induzierten Topologie eine Mannigfaltigkeit ist und mit dieser Topologie eine Lie-Gruppe wird;*

(B) eine ***Lie-Untergruppe*** *von G, falls H eine Lie-Gruppe ist und die Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow G$ ein glatter Gruppenhomomorphismus ist.*

Beispiel 5

1. *Die Gruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ist eine topologische Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, weil sie abgeschlossen ist.*
2. *Die Gruppe $\{(e^{i\alpha t, e^{it}}) \in S^1 \times S^1 : t \in \mathbb{R}\}$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist eine Lie-Untergruppe von T^2 aber keine topologische Lie-Untergruppe, weil sie dicht in T^2 liegt.*

Das Ziel dieses Abschnittes soll es sein, zu verstehen, wie Lie-Untergruppen und Lie-Unteralgebren zusammenhängen. Wir werden uns dazu genauer mit Definition 10 (B) befassen. Ist $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe, so können wir zu den durch H und G gegebenen Lie-Algebren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ übergehen und uns die Frage stellen, ob auch $\mathfrak{h}$ über eine Identifizierung eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Wie man leicht sieht, ist dies in der Tat der Fall, wie der folgende Satz zeigen wird.

Satz 8 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$. Dann ist $\iota_*(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra.*

Beweis: Nach Definition der Lie-Untergruppe ist die Inklusion $\iota : H \hookrightarrow G$ ein glatter Gruppenhomomorphismus. Wir können das Differential im Sinne von Definition 9 bilden und erhalten nach Satz 6 einen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\iota_* : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

zwischen den Lie-Algebren. Also ist $\iota_*(\mathfrak{h})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

□

Man identifiziert die Lie-Unteralgebra $\iota_*(\mathfrak{h})$ mit $\mathfrak{h}$. Benutzen wir die Kommuntativität aus Folgerung 3, so erhalten wir dadurch eine Identifikation der Exponentialabbildungen:

$$\exp_{\mathfrak{h}} = \iota \circ \exp_{\mathfrak{h}} = \exp_{\mathfrak{g}} \circ \, \iota_* \mathrel{\hat{=}} \exp_{\mathfrak{g}} |_{\mathfrak{h}}.$$

Ohne Beweis wollen wir nun die Umkehrung von Satz 8 zitieren.

Satz 9 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert genau eine zusammenhängende Lie-Untergruppe $H \subset G$, dessen Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ ist.*

Beweis: Der Beweis nutzt den Satz von Frobenius; siehe z. B. [1, Seite 27 f.] □

6. Satz von Ado

Wir betrachten folgende Zuordnung:

$$\Gamma : \{\text{Lie-Gruppen}\} \longrightarrow \{\text{endlich dim. } \mathbb{R}\text{-Lie-Algebren}\}$$

und stellen uns die Frage, ob diese Zuordnung bijektiv sein kann. Die Frage der Surjektivität beantworten wir sogleich mit dem Satz von Ado.

Satz 10 *(Satz von Ado; Igor Dmitrijewitsch Ado *1910 – †1983)*
Jede endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Lie-Algebra ist isomorph zu einer Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: siehe [4, Seite 172 ff.] □

Folgerung 4 *Γ ist surjektiv, d. h. zu jeder Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ existiert eine Lie-Gruppe G, deren Raum der linksinvarianten Vektorfelder isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist.*

Beweis: Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{K}$-Lie-Algebra und $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ die nach dem Satz von Ado zu $\mathfrak{g}$ isomorphe Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}).$$

Da $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ist, existiert nach Satz 9 genau eine zusammenhängende Lie-Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, deren Lie-Algebra $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ ist.

□

Bemerkung 3 *Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt genau eine einfach-zusammenhängende Lie-Gruppe G. Ist H eine weitere Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$, so wird H von G überlagert. Insbesondere sind G und H lokal isomorph.*

Beweis: Beweise zu den einzelnen Behauptungen finden sich in [5, Seite 80 ff.], sowie [4, Seite 209]. □

Das abschließende Beispiel illustriert diese Bemerkung, aus der wir insbesondere foglern, dass Γ leider nicht injektiv ist, d. h. die Lie-Algebren bestimmen nicht gänzlich die Lie-Gruppen; sind also zwei Lie-Algebren isomorph, so gilt dies nicht notwendiger Weise auch für die zugehörigen Lie-Gruppen. Man kann man im Falle isomorpher Lie-Algebren jedoch zeigen, dass die Lie-Gruppen zumindest lokal isomorph sein müssen (siehe Bemerkung 3). Wir schließen mit dem angekündigten Gegenbeispiel, welches die Kenntnis über die zu $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(2)$ gehörigen Lie-Algebren benötigt, welche wir in Satz 1 bereits berechnet hatten.

Beispiel 6 *Wir betrachten die Lie-Gruppe*

$$G := \{q \in \mathbb{H} \ : \ \det q = 1\} \subset \mathbb{H}$$

aus Beispiel 1.6. Hierbei bezeichnen wir mit $\mathbb{H}$ die Quaternionengruppe

$$\mathbb{H} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

In der Tat ist die durch G definierte Gruppe wegen

$$q \in G \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+w^2 = 1 \Leftrightarrow q\overline{q}^T = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+w^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2+w^2 \end{pmatrix} = E$$

gleich der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(2)$. Wir setzen

$$\Im m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}) := \{q = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + w\mathbf{k} \in \mathbb{H} \mid x = 0\} \cong \mathbb{R}^3$$

und vermöge dieser Identifizierung induziert

$$\varphi_q(p) := q \cdot p \cdot q^{-1} \in \Im m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$$

für $q \in G$, $p \in \Im m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H})$ einen Homomorphismus

$$\Phi : G = \mathrm{SU}(2) \ni q \longmapsto \varphi_q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}).$$

der Gruppen, da $\varphi_q \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Die Abbildung Φ ist surjektiv mit Kern $\ker\Phi = \{\pm E\}$ und eine Überlagerung. Da $\mathrm{SU}(2)$ isometrisch zu S^3 ist (siehe Anhang), ist Φ sogar die universelle Überlagerung der $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ und somit kann G nicht isomorph zu $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ sein. Aus Satz 1 ist bekannt, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &\cong \{X \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}, \\ \mathfrak{su}(2) &\cong \{X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) \mid X + \overline{X}^T = 0\}, \end{aligned}$$

und diese Lie-Algebren sind sogar (als Lie-Algebren) isomorph. Dies sieht man wiefolgt: $\mathfrak{so}(3)$ *wird erneugt durch* X_1, X_2, X_3 *definiert als*

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{su}(2)$ *wird erzeugt durch* Y_1, Y_2, Y_3*, definiert als*

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; Y_2 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\varphi(X_i) := Y_i$*,* $i = 1, 2, 3$ *definiert einen Isomorphismus auf den Erzeugern und überträgt die Kommutatorrelationen* $[X_1, X_2] = X_3$*,* $[X_3, X_1] = X_2$ *und* $[X_2, X_3] = X_1$ *korrekt, ist damit also insbesondere ein Lie-Algebren-Isomorphismus.*

A. Anhang

Satz 11 SO(n) *ist eine Untermannigfaltigkeit (UMF) des* $\mathbb{R}^{n^2}$ *der Dimension* $\binom{n}{2}$.

Beweis: Sei I die Einheitsmatrix. Im folgenden wollen wir den $\mathbb{R}^{n^2}$ linear isomorph mit $\mathbb{R}^{n\times n}$ identifizieren; man wähle z. B.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \overset{\sim}{\mapsto} (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Ferner sei $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I\}$ die orthogonale Gruppe und

$$S(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A\}$$

die Gruppe der symmetrischen Matrizen. Wir bemerken zudem, dass $S(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Hierzu betrachte man den Isomorphismus

$$\overbrace{\{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid a_{ij} = 0 \ \forall i > j\}}^{\cong\, S(n)} \overset{\sim}{\mapsto} (a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Wegen $A^T A \in S(n)$ und damit $A^T A - I \in S(n)$ ist folgende Definition sinnvoll:

$$F : \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2} \to S(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

mit

$$F(A) := A^T A - I.$$

Damit erhalten wir $\mathrm{O}(n) = F^{-1}(0)$ als Urbild von Null. Offensichtlich ist F als lineare Abbildung von der Klasse C^∞. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{rg}(DF(A))$ maximal ist. Dazu errechnet man

$$\begin{aligned} DF(A)(X) &\overset{F\in C^\infty}{=} \nabla_X F(A) \quad \textit{(Richtungsableitung)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{F(A+tX) - F(A)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(A+tX)^T(A+tX) - I - A^T A + I}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} (X^T A + A^T X + tX^T X) \\ &= X^T A + A^T X, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}. \end{aligned}$$

Insbesondere sind alle $A, X \in \mathrm{O}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, mithin auch $X^T A + A^T X$ und es folgt direkt $(\det(DF(A)) \neq 0)$, dass $\mathrm{rg}(DF(A))$ maximal ist. Als gleichungsdefinierte Menge ist $\mathrm{O}(n)$ damit eine $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale UMF des $\mathbb{R}^{n^2}$. Dann ist aber auch SO(n) eine UMF der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, denn die Funktion

$$G : \mathrm{O}(n) \to \mathbb{R}^1, \ G(A) = \det A - 1$$

ist stetig und für alle $A \in \mathrm{O}(n)$ gilt $\det A = \pm 1$. Entsprechend ist $\mathrm{SO}(n)$ z. B. das echte Urbild:

$$G^{-1}((-1,1)) = \mathrm{SO}(n).$$

Nun ist aber $(-1,1)$ offen in $\mathbb{R}^1$ und damit auch das Urbild $\mathrm{SO}(n)$. Ist aber $\mathrm{SO}(n)$ offen in $\mathrm{O}(n)$, so ist auch $\mathrm{SO}(n)$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale UMF (als Atlas wähle man die Karten, welche $\mathrm{O}(n)$ überdecken und schränke diese auf $\mathrm{SO}(n)$ ein).

□

Satz 12 *Man betrachte die Lie-Gruppe* $\mathrm{SU}(2)$ *mit der Lie-Algebra* $\mathfrak{su}(2)$*. Sei* h *die linksinvariante Metrik auf* $\mathrm{SU}(2)$*, welche durch das Skalarprodukt* $\langle X, Y\rangle_{\mathfrak{su}(2)} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{spur}(X \circ Y)$ *auf* $\mathfrak{su}(2)$ *gegeben ist. Dann ist* $(\mathrm{SU}(2), h)$ *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung 1.*

Beweis: Wir zeigen, dass $\mathrm{SU}(2)$ und $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ isometrische Mannigfaltigkeiten sind. Da die Sphäre S^3 bekanntlich konstante Schnittkrümmung 1 hat, folgt damit die Behauptung, da Isometrien Riemannscher Mannigfaltigkeiten gleiche Krümmungstensoren induzieren.

Als Isometrie wähle man die Abbildung

$$\theta : \mathrm{SU}(2) \ni A \longmapsto (u,v) \in S^3 \text{ für } A = \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}.$$

Sei g die induzierte Riemannsche Metrik auf S^3. Es bleibt zu zeigen, dass $\theta^* g = h$ gilt. Ist E die Einheitsmatrix, so gilt

$$\mathfrak{su}(2) = T_E(\mathrm{SU}(2)) \Longrightarrow (dL_A)_E(T_E(\mathrm{SU}(2))) = T_A(\mathrm{SU}(2)),$$

wobei $(dL_A)(T_E(\mathrm{SU}(2))) = A \cdot \mathfrak{su}(2)$ und L_A die Linkstranslation mit $(dL_A)_E : T_E(\mathrm{SU}(2)) \to T_{L_A(E)=A}(\mathrm{SU}(2))$ für $A \in \mathrm{SU}(2)$. Bekanntlich bilden $E_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ eine ON-Basis von $\mathfrak{su}(2)$ und mithin (AE_1, AE_2, AE_3) eine ON-Basis in $T_A(\mathrm{SU}(2))$. Die Behauptung vereinfacht sich daher zu der Annahme, dass auch

$$((d\theta)_A(AE_1), (d\theta)_A(AE_2), (d\theta)_A(AE_3))$$

eine ON-Basis in $(T_{\theta(A)}S^3, g)$ ist. Sei $\gamma(t) := A\exp(tE_1)$ eine Kurve aus $T_A(\mathrm{SU}(2))$. Dann gilt $\gamma(0) = A$ und $\gamma'(0) = AE_1$ und nach Definition des Differentials mithin:

$$\begin{aligned}
(d\theta)_A(AE_1) &= \frac{d}{dt}(\theta(\gamma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\theta(A\exp(tE_1)))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\theta\left(\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\right))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\theta\left(\begin{pmatrix} ue^{it} & -\overline{v}e^{-it} \\ ve^{it} & \overline{u}e^{-it} \end{pmatrix}\right))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(ue^{it}, ve^{it})|_{t=0} = (iu, iv).
\end{aligned}$$

Analog erhält man $(d\theta)_A(AE_2) = (\overline{v}, -\overline{u})$ und $(d\theta)_A(AE_3) = (-i\overline{v}, i\overline{u})$. Wegen $|u|_{\mathbb{C}}^2 + |v|_C^2 = 1$ erhält man:

$$\langle (d\theta)_A(AE_1), (d\theta)_A(AE_1) \rangle_{T_{\theta(A)}S^3} = \langle (iu, iv), (iu, iv) \rangle_{\mathbb{C}^2} = 1$$

und analog: $\langle (d\theta)_A(AE_i), (d\theta)_A(AE_j) \rangle_{T_{\theta(A)}S^3} = \delta_{ij}$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] Helga Baum, „Eichfeldtheorie“, Springer, 2009.

[2] Jürgen Heine, „Topologie und Funktionalanalysis“: Grundlagen der Abstakten Analysis mit Anwendungen, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2002.

[3] Martin Schottenloher, „Geometrie und Symmetrie in der Physik: Leitmotiv der Mathematischen Physik“, Vieweg+Teubner Verlag, 1995.

[4] J. Hilgert, K.-H. Neeb, „Lie-Gruppen und Lie-Algebren“, Vieweg, 1991.

[5] Brian C. Hall, „Lie Groups, Lie Algebras, and Representations“, Springer 2003.