

Périodes des variétés hyperkählériennes

mémoire de M2 sous la direction d'Olivier Debarre

Jieao Song

soutenu le 28 juin 2018

Table des matières

Introduction	2
1 Théorie des réseaux	6
1.1 Définition et propriétés	7
2 Généralités sur les variétés hyperkählériennes	10
2.1 Définition et premières propriétés	10
2.2 Exemples	11
2.2.1 Type $K3^{[m]}$	11
2.2.2 Type Kummer	12
2.2.3 Exemples de O'Grady	13
3 Espace de modules marqué	13
3.1 Théorème de Torelli	13
3.2 Non séparation	15
3.2.1 Flop d'Atiyah	15
3.2.2 Contre-exemple de Debarre	16
3.2.3 Contre-exemple de Namikawa	17
3.3 Cône kählérien et cône mobile	18
3.4 Groupe de monodromie	22
3.4.1 Résultats généraux	22
3.4.2 Surface $K3$	24
3.4.3 Type $K3^{[m]}$	25

3.4.4	Type Kummer	26
4	Espace de modules polarisé	27
4.1	Définition et propriétés	27
4.2	Nombre de composantes	30
4.2.1	Surface K3	31
4.2.2	Type $K3^{[m]}$	32
4.2.3	Type Kummer	36
4.3	Dualité étrange	37
4.4	Exemples	39
4.4.1	Type $K3^{[2]}$ polarisé	39
4.4.2	Type $K3^{[2]}$ polarisé de carré 6 et de divisibilité 2 . . .	41
	Références	43

Introduction

Soit S une surface K3. Le groupe abélien $H^2(S, \mathbf{Z})$ muni du produit d'intersection est un réseau qui est indépendant de S . Le célèbre théorème de Torelli dit que la classe d'isomorphisme de S est uniquement déterminée par la structure de Hodge de S sur ce réseau. C'est un résultat dû à Pjateckiĭ-Šapiro, Šafarevič, Burns, Rapoport et beaucoup d'autres.

Théorème (Théorème de Torelli, [Hu1, Chapter 7, Theorem 5.3]). *Des surfaces K3 S et S' sont isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie de Hodge*

$$\phi: H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S', \mathbf{Z}).$$

De plus si le cône kählérien est préservé dans le sens $\phi(\mathcal{K}_S) \cap \mathcal{K}_{S'} \neq \emptyset$, alors ϕ est induite par un isomorphisme $\varphi: S' \rightarrow S$, c'est-à-dire $\phi = \varphi^$.*

Il existe une autre version de ce résultat qui utilise les notions d'espace de modules et de période. On considère des surfaces K3 marquées (S, ϕ) , c'est-à-dire que S est munie d'un marquage $\phi: H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{K3}$ qui est une isométrie, où Λ_{K3} est un réseau fixé. On note \mathfrak{M}_{K3} l'espace de modules des surfaces K3 marquées (S, ϕ) , qui est un espace analytique lisse. Comme $h^{2,0}(S) = 1$ pour une surface K3, l'espace $\phi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S))$ correspond à un point dans $\mathbf{P}(\Lambda_{K3} \otimes \mathbf{C})$ que l'on appelle la période de (S, ϕ) . On peut

donc définir l'application des périodes qui associe à chaque surface $K3$ marquée sa période. On a le théorème suivant.

Théorème (Théorème de Torelli, variante). *L'espace de modules \mathfrak{M}_{K3} a deux composantes connexes \mathfrak{M}_{K3}^+ et \mathfrak{M}_{K3}^- , échangées par $(S, \phi) \mapsto (S, -\phi)$, et l'application des périodes*

$$\begin{aligned} \wp_{K3}: \mathfrak{M}_{K3} &\longrightarrow \mathcal{D}_{K3} := \left\{ x \in \mathbf{P}(\Lambda_{K3} \otimes \mathbf{C}) \mid x^2 = 0, x \cdot \bar{x} > 0 \right\} \\ (S, \phi) &\longmapsto [\phi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S))] \end{aligned}$$

est surjective, étale et génériquement injective sur chaque composante connexe.

L'injectivité étant seulement générique, il existe des points non séparés dans l'espace de modules. Dans une fibre non séparée, on peut passer d'un point à l'autre par une construction qu'on appelle *flop d'Atiyah*. Néanmoins, des surfaces ayant la même période sont isomorphes. Donc la première version du théorème de Torelli vaut.

Considérons maintenant les variétés hyperkähleriennes X , la généralisation des surfaces $K3$ en dimension supérieure. Beauville-Bogomolov-Fujiki ont montré qu'il existe une forme quadratique non dégénérée sur le groupe abélien $H^2(X, \mathbf{Z})$, qui en fait un réseau de signature $(3, b_2(X) - 3)$. Soit Λ un réseau. Un Λ -marquage est une isométrie $\phi: H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda$. On peut de nouveau considérer l'espace de modules \mathfrak{M}_{Λ} des variétés hyperkähleriennes Λ -marquées (X, ϕ) , qui est un espace analytique, et construire l'application des périodes (puisque $h^{2,0}(X) = 1$ par définition). A priori, le réseau Λ ne détermine pas le type de déformation. Pour un type de déformation X fixé, on note \mathfrak{M}_X le sous-espace de modules de \mathfrak{M}_{Λ} paramétrant les variétés hyperkähleriennes Λ -marquées de type X , qui est une réunion de composantes connexes de \mathfrak{M}_{Λ} . Verbitsky [V] et Huybrechts [Hu2] ont démontré le théorème de Torelli suivant.

Théorème. *Si \mathfrak{M}_{Λ} est non vide, la restriction de l'application des périodes*

$$\begin{aligned} \wp_{\Lambda}: \mathfrak{M}_{\Lambda} &\longrightarrow \mathcal{D}_{\Lambda} := \left\{ x \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C}) \mid x^2 = 0, x \cdot \bar{x} > 0 \right\} \\ (X, \phi) &\longmapsto [\phi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(X))] \end{aligned}$$

à chaque composante connexe de \mathfrak{M}_{Λ} est surjective, étale et génériquement injective.

Mais maintenant, les variétés hyperkählériennes ayant la même période peuvent ne pas être isomorphes, ni même birationnellement isomorphes. Des contre-exemples ont été trouvés par Debarre [D2] et Namikawa [N], voir la section 3.2. Donc pour l'espace de modules \mathfrak{M}_X d'un type de déformation fixé, il existe maintenant non seulement des fibres non séparées, mais aussi plusieurs paires de composantes connexes ($\mathfrak{M}^+, \mathfrak{M}^-$). En particulier, le théorème de Torelli dans sa forme originale ne vaut plus.

Un premier problème est de déterminer le nombre de composantes connexes de \mathfrak{M}_X pour un type de déformation X fixé. Cela peut se résoudre en déterminant le groupe de monodromie $\text{Mon}(X)$, qui sera défini dans la définition 3.18. Plus précisément, le groupe d'isométries $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ agit transitivement sur les composantes connexes de \mathfrak{M}_X avec noyau $\text{Mon}(X)$, donc le nombre de composantes de type X est égal à l'indice de $\text{Mon}(X)$ dans $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$. Lorsque $\text{Mon}(X)$ est égal à $O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$, le plus grand sous-groupe possible, \mathfrak{M}_X admet deux composantes connexes, échangées par le changement de signe du marquage. On a dans ce cas le résultat suivant.

Théorème (Théorème de Torelli birationnel, [Hu2, Corollary 6.3]). *Soit X un type de déformation de variétés hyperkählériennes. Lorsque $\text{Mon}(X) = O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$, des variétés hyperkählériennes X_1, X_2 de type X sont birationnellement isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie de Hodge*

$$H^2(X_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_2, \mathbf{Z}).$$

La détermination du groupe de monodromie pour une surface K3 est un résultat bien connu [Hu1, Chapter 7, Proposition 5.5]. Le cas du type $K3^{[m]}$ a été traité par Markman [M]. Le cas du type Kummer a récemment été résolu par Mongardi [Mo1]. On note $\rho(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts d'un entier n .

Proposition. *Soit X une variété hyperkählérienne.*

1. *Si X est une surface K3, on a*

$$\text{Mon}(X) = O^+(H^2(X, \mathbf{Z})).$$

2. *Si X est de type $K3^{[m]}$ avec $m \geq 2$, on a*

$$\text{Mon}(X) = \widehat{O}^+(H^2(X, \mathbf{Z})).$$

C'est un sous-groupe d'indice $2^{\max(\rho(m-1)-1,0)}$ dans $O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$. Le théorème de Torelli birationnel vaut si et seulement si m est de la forme $p^a + 1$, où p est un nombre premier ;

3. Si X est de type K_m avec $m \geq 2$, le sous-groupe $\text{Mon}(X)$ est d'indice $2^{\rho(m+1)}$ dans $O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$. Le théorème de Torelli birationnel ne vaut jamais.

Passons aux variétés hyperkähleriennes polarisées, c'est-à-dire qu'elles sont munies d'une classe ample. Fixons un réseau Λ et un type de polarisation τ , c'est-à-dire une $O(\Lambda)$ -orbite d'éléments primitifs de Λ de carré strictement positif. Il existe un espace de modules grossier \mathfrak{M}_τ pour les variétés hyperkähleriennes polarisées de type τ , qui est une variété quasi-projective. L'application des périodes est construite en considérant l'action d'un certain groupe de monodromie. Notons \mathcal{P}_τ le domaine des périodes polarisé, le quotient du domaine des périodes par ce groupe de monodromie. On a le théorème de Torelli polarisé suivant.

Théorème. *La restriction de l'application des périodes*

$$\wp_\tau: \mathfrak{M}_\tau \longrightarrow \mathcal{P}_\tau$$

à chaque composante connexe de \mathfrak{M}_τ est une immersion ouverte d'image dense.

De nouveau, l'espace de modules \mathfrak{M}_τ peut avoir plusieurs composantes connexes, même pour un type de déformation fixé. Cette fois-ci, la situation est plus intéressante puisque les composantes sont de natures différentes. Gritsenko–Hulek–Sankaran [GHS] et Apostolov [A] ont calculé le nombre de composantes dans le cas de type $K3^{[m]}$, pour des types de polarisation de carré et divisibilité fixés. En fait, on peut donner un comptage plus raffiné : en considérant l'action du groupe de monodromie polarisé, on peut obtenir le nombre de composantes de chaque \mathfrak{M}_τ . Ainsi, on peut aussi calculer le nombre de types de polarisation ayant le même carré et la même divisibilité. Ces méthodes s'appliquent aussi au cas d'une variété hyperkählienne de type Kummer.

Théorème. *Soit \mathfrak{M}_τ l'espace de modules polarisé pour un type de polarisation τ , qui est de carré $2d$ et de divisibilité γ . Notons $\tilde{\rho}(n)$ la fonction qui vaut $\rho(n)$ si n est impair et $\rho(n/2)$ si n est pair.*

1. Dans le cas de type $K3^{[m]}$, l'espace \mathfrak{M}_τ a $2^{\max(\tilde{\rho}(\gamma)-1,0)}$ composantes connexes. Le nombre de types τ ayant le même carré $2d$ et la même divisibilité γ est un produit $\prod_{p|\gamma} N_p$, où N_p dépend de la multiplicité de p dans γ , $m - 1$ et d (cf. théorème 4.12);
2. Dans le cas de type K_m , l'espace \mathfrak{M}_τ a $2^{\max(\tilde{\rho}(\gamma)-1,0)}$ composantes connexes. Le nombre de types τ ayant le même carré $2d$ et la même divisibilité γ est un produit $\prod_{p|\gamma} N_p$, où N_p dépend de la multiplicité de p dans γ , $m + 1$ et d (cf. théorème 4.17).

Dans le cas $K3^{[m]}$, le réseau $\Lambda = \Lambda_{K3^{[m]}}$ peut être vu comme un sous-réseau de Λ_{24} , le réseau de Mukai qui est pair et unimodulaire. En particulier, il existe un élément v de carré $2m - 2$ dans Λ_{24} , avec $v^\perp \cong \Lambda$. Apostolov a remarqué dans [A] qu'il existe une bijection entre les composantes de \mathfrak{M}_τ et les $O(\Lambda_{24})$ -orbites de certains sous-réseaux $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ de rang 2 dans Λ_{24} , où $h \in v^\perp \cong \Lambda$ est de type τ . Un sous-réseau $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ de rang 2 peut parfois apparaître de deux manières différentes : lorsque $h^2 = 2n$ et $v^2 = 2m - 2$, on obtient un type de polarisation τ_1 de carré $2n$ sur les variétés hyperkähleriennes de type $K3^{[m]}$ et un autre type τ_2 de carré $2m - 2$ sur les variétés hyperkähleriennes de type $K3^{[n+1]}$. Il existe en fait un isomorphisme ${}^m\mathcal{P}_{\tau_1} \cong {}^{n+1}\mathcal{P}_{\tau_2}$ entre les domaines de périodes correspondants (proposition 4.18). Cet isomorphisme induit un morphisme birationnel entre les espaces de modules ${}^m\mathfrak{M}_{\tau_1}$ et ${}^{n+1}\mathfrak{M}_{\tau_2}$. On l'appelle la *dualité étrange*. La même construction peut être faite pour le cas Kummer. Mais il est difficile de construire cette correspondance explicitement : seulement un exemple a été étudié complètement.

Remerciement. J'aimerais remercier Olivier Debarre pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire et pour sa disponibilité et ses explications. Je tiens également à remercier Claire Voisin, qui a fait partie du jury, pour ses conseils et suggestions.

1 Théorie des réseaux

Dans cette première section, on introduit les notions et résultats sur les réseaux qui sont essentiels pour toutes les discussions suivantes.

1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1. Un *réseau* Λ est un groupe abélien libre de rang fini muni d'une forme bilinéaire entière q non dégénérée. Son réseau *dual* est

$$\Lambda^\vee := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z}) = \{x \in \Lambda \otimes \mathbf{Q} \mid \forall y \in \Lambda \quad x \cdot y \in \mathbf{Z}\} \supset \Lambda.$$

Le *groupe discriminant* $D(\Lambda)$ est le quotient Λ^\vee / Λ , qui est un groupe abélien fini. Le réseau est dit *unimodulaire* si $D(\Lambda)$ est trivial ; il est dit *pair* si q prend ses valeurs dans $2\mathbf{Z}$.

Exemple 1.2. On regarde deux exemples importants de réseaux pairs et unimodulaires. Le *plan hyperbolique* U est le réseau \mathbf{Z}^2 muni de la forme q de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le réseau E_8 est le sous-groupe de \mathbf{Q}^8 (muni de la forme quadratique euclidienne) engendré par E , le sous-réseau de \mathbf{Z}^8 formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est paire, et le vecteur $\frac{1}{2}(1, \dots, 1)$. C'est le seul réseau pair, unimodulaire et défini positif de rang 8. On note aussi $E_8(-1)$ le réseau obtenu en inversant le signe de la forme quadratique sur E_8 . Le théorème suivant dit que ces deux réseaux déterminent essentiellement tous les réseaux pairs, unimodulaires et indéfinis.

Théorème 1.3 ([S, chapitre V, théorème 5]). *Soit Λ un réseau pair, unimodulaire et indéfini, de signature (p, q) . Alors $p - q$ est un multiple de 8 et on a*

$$\Lambda \cong \begin{cases} U^{\oplus q} \oplus E_8^{\oplus \frac{p-q}{8}} & \text{si } p \geq q; \\ U^{\oplus p} \oplus E_8(-1)^{\oplus \frac{q-p}{8}} & \text{si } p < q. \end{cases}$$

Lorsque Λ est pair, la forme q descend en une forme quadratique \bar{q} sur $D(\Lambda)$ à valeurs dans $\mathbf{Q}/2\mathbf{Z}$: pour $x \in \Lambda^\vee$ et $y \in \Lambda$, l'entier $q(x + y) = q(x) + 2x \cdot y + q(y)$ modulo $2\mathbf{Z}$ ne dépend pas de y . On a donc un morphisme de groupes canonique

$$(1) \quad \chi: O(\Lambda, q) \longrightarrow O(D(\Lambda), \bar{q}).$$

On note $\tilde{O}(\Lambda)$ le noyau de χ et on l'appelle le *groupe orthogonal stable*. On note $\widehat{O}(\Lambda)$ l'image inverse de $\{\pm \text{Id}\}$. On a les résultats suivants.

Lemme 1.4 ([Ni, Theorem 1.14.2]). *Lorsque Λ est pair, indéfini, et que $\text{rang}(\Lambda)$ est au moins 2 plus le nombre minimal de générateurs de $D(\Lambda)$, alors χ est surjective.*

Proposition 1.5 ([GHS, Corollary 3.4]). *Soit Λ un réseau pair et unimodulaire. Pour tout élément $h \in \Lambda$ non nul, on a*

$$O(\Lambda, h)|_{h^\perp} \cong \tilde{O}(h^\perp).$$

On a noté $\rho(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n . On a le lemme suivant.

Lemme 1.6. *Soit G un groupe cyclique d'ordre $2n$ muni d'une forme quadratique $\bar{q}: G \rightarrow \mathbf{Q}/2\mathbf{Z}$. On suppose qu'il existe un générateur g de G tel que $\bar{q}(g) = \frac{1}{2n}$. On a alors*

$$O(G, \bar{q}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\rho(n)}.$$

Démonstration. Une isométrie est déterminée par l'image ag de g , où a est un entier modulo $2n$ tel que $\bar{q}(g) = \bar{q}(ag) = a^2\bar{q}(g)$. On a donc

$$O(G, \bar{q}) \cong \left\{ a \bmod 2n \mid a^2 \equiv 1 \bmod 4n \right\}.$$

Décomposons n en produit de nombres premiers $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, avec $r = \rho(n)$. Si n est impair, a est choisi selon les conditions $a \equiv \pm 1 \bmod p_i^{a_i}$ et $a \equiv 1 \bmod 2$. Si n est pair, supposons $p_1 = 2$, alors a est choisi selon les conditions $a \equiv \pm 1 \bmod 2^{a_1+1}$ et $a \equiv \pm 1 \bmod p_i^{a_i}$ pour $i \geq 2$. Dans les deux cas, on a un isomorphisme $O(G, \bar{q}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\rho(n)}$. \square

Un élément $x \in \Lambda$ non nul est dit *primitif* si pour tout entier $n \geq 1$ et tout $y \in \Lambda$, si $x = ny$, alors $n = 1$. Pour un élément x de Λ non nul, on définit sa *divisibilité* $\text{div}(x)$ comme le générateur positif du sous-groupe $x \cdot \Lambda$ de \mathbf{Z} . On pose $x_* := [x/\text{div}(x)] \in D(\Lambda)$, qui est d'ordre $\text{div}(x)$ dans le groupe $D(\Lambda)$.

Théorème 1.7 (Critère d'Eichler, [GHS, Lemma 3.5]). *Soit Λ un réseau pair qui contient au moins deux copies orthogonales de U . La $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbite d'un élément primitif $x \in \Lambda$ est déterminée par le carré $q(x)$ et la classe x_* dans le groupe $D(\Lambda)$.*

Pour certains réseaux Λ , on peut calculer le nombre de $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites dans une $O(\Lambda)$ -orbite fixée.

Proposition 1.8. *Soit Λ un réseau pair contenant au moins deux copies orthogonales de U , tel que le morphisme χ de (1) soit surjectif et tel que $D(\Lambda)$ satisfasse les conditions du lemme 1.6. Soit τ une $O(\Lambda)$ -orbite primitive de divisibilité γ . Alors,*

- *si γ est impair, le nombre de $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites dans τ est $2^{\rho(\gamma)}$;*
- *si γ est pair, le nombre de $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites dans τ est $2^{\rho(\gamma/2)}$.*

Démonstration. Par le critère d'Eichler et comme χ est surjectif, pour compter les $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites, la seule variable est la classe h_* dans $D(\Lambda)$ lorsque le carré de h est donné. Il suffit donc de déterminer le nombre de différentes classes h_* dans $D(\Lambda)$ pour h dans τ .

Fixons un h dans τ . L'élément h_* est d'ordre γ dans $D(\Lambda)$. Tout autre h' dans τ est de la forme $h' = \varphi(h)$ pour un $\varphi \in O(\Lambda)$. On a $h'_* = \chi(\varphi)(h_*)$. Comme

$$\chi: O(\Lambda) \longrightarrow O(D(\Lambda))$$

est surjective et que

$$O(D(\Lambda)) \cong \left\{ a \bmod 2n \mid a^2 \equiv 1 \bmod 4n \right\},$$

on obtient que tout h'_* est de la forme $h'_* = ah_*$ pour un $a \in O(D(\Lambda))$. Tous les h'_* sont d'ordre γ , donc le nombre de différentes classes de h_* est égal au nombre de classes $a \in O(D(\Lambda))$ modulo γ . En suivant le même argument que dans la démonstration du lemme 1.6, on écrit $\gamma = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ avec $r = \rho(\gamma)$. Si γ est impair, a est choisi selon les conditions $a \equiv \pm 1 \bmod p_i^{a_i}$ et $a \equiv 1 \bmod 2$. Si γ est paire, supposons $p_1 = 2$. Si γ est divisible par 4, c'est-à-dire $a_1 \geq 2$, alors a est choisi selon les conditions $a \equiv \pm 1 \bmod 2^{a_1}$ et $a \equiv \pm 1 \bmod p_i^{a_i}$ pour $i \geq 2$; sinon, a est choisi selon les conditions $a \equiv \pm 1 \bmod p_i^{a_i}$ pour $i \geq 2$ et $a \equiv 1 \bmod 2$. On obtient les nombres voulus. \square

On note dans la suite

$$\tilde{\rho}(n) := \begin{cases} \rho(n) & \text{si } n \text{ impair;} \\ \rho(n/2) & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

2 Généralités sur les variétés hyperkähleriennes

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1. Une *variété hyperkählérienne* est une variété compacte kählérienne simplement connexe dont l'espace des 2-formes holomorphes est engendré par une 2-forme qui est non dégénérée en tout point (comme forme alternée sur l'espace tangent).

Il découle de la définition qu'une variété hyperkählérienne est de fibré canonique trivial, de dimension paire $2m$, et que $H^2(X, \mathbf{Z})$ est sans torsion. En dimension 2, les variétés hyperkähleriennes sont exactement les surfaces K3.

Une propriété cruciale pour une variété hyperkählérienne X est l'existence d'une forme quadratique intègre indivisible q_X sur le deuxième groupe de cohomologie $H^2(X, \mathbf{Z})$, de signature $(3, b_2 - 3)$, dite forme de *Beauville-Fujiki*.

Théorème 2.2 (Beauville-Fujiki). *Soit X une variété hyperkählérienne de dimension $2m$. Il existe une forme quadratique intègre indivisible q_X sur $H^2(X, \mathbf{Z})$ de signature $(3, b_2 - 3)$ et une constante de Fujiki $c_X > 0$ rationnelle, telles que pour toute classe $x \in H^2(X, \mathbf{Z})$, on a*

$$x^{2m} = c_X \cdot q_X(x)^m.$$

De plus, pour toute classe de Kähler x , on a $q_X(x) > 0$.

Sur une surface K3, la forme de Beauville-Fujiki coïncide avec le produit d'intersection, la constante de Fujiki c_S vaut 1. La structure de réseau sur le deuxième groupe de cohomologie d'une surface K3 est bien connue.

Théorème 2.3 ([Hu1, Chapter 1, Proposition 3.5]). *Soit S une surface K3. Le groupe $H^2(S, \mathbf{Z})$ muni du produit d'intersection q est un réseau pair et unimodulaire et*

$$(H^2(S, \mathbf{Z}), q) \cong \Lambda_{K3} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}.$$

La forme q est de signature $(3, 19)$.

Les variétés hyperkähleriennes sont importantes, particulièrement à cause du théorème suivant.

Théorème 2.4 (Beauville-Bogolomov, [B, théorème 2]). *Soit X une variété compacte kählérienne de première classe de Chern nulle $c_1(X) = 0$. Il existe un morphisme fini étale*

$$\prod_{i=1}^d M_i \longrightarrow X$$

où les variétés compactes M_i sont soit des tores, soit des variétés de Calabi-Yau, soit des variétés hyperkähleriennes. Ici une variété de Calabi-Yau est une variété compacte kählérienne M de dimension $n \geq 3$ avec fibré canonique trivial et $H^0(M, \Omega_M^p) = 0$ pour $0 < p < n$.

2.2 Exemples

À ce jour, deux types de déformations (de type $K3^{[m]}$ et de type Kummer K_m) en chaque dimension paire ont été découverts par Beauville et deux autres types en dimension 6 et 10 ont été trouvés plus tard par O’Grady.

2.2.1 Type $K3^{[m]}$

Soit S une surface $K3$. L’espace $S^{[m]}$ paramètre les sous-espaces analytiques de S de longueur m . Beauville a montré que c’est une variété hyperkählienne. Il a de plus déterminé la constante de Fujiki

$$c_{S^{[m]}} = \frac{(2m)!}{m! \cdot 2^m}$$

et le deuxième groupe de cohomologie pour $m \geq 2$

$$H^2(S^{[m]}, \mathbf{Z}) \cong H^2(S, \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}\delta,$$

où 2δ est la classe du diviseur dans $S^{[m]}$ paramétrant les sous-espaces non réduits. En conséquence, chaque classe x dans $H^2(S, \mathbf{Z})$ induit une classe dans $H^2(S^{[m]}, \mathbf{Z})$. Le réseau donné par la forme de Beauville-Fujiki est

$$(2) \quad (H^2(S^{[m]}, \mathbf{Z}), q_{S^{[m]}}) \cong \Lambda_{K3^{[m]}} := \Lambda_{K3} \oplus \langle -(2m - 2) \rangle,$$

où Λ_{K3} est le réseau des surfaces $K3$.

On dit qu’une variété hyperkählienne est de type $K3^{[m]}$ si elle est déformation d’une $S^{[m]}$. Comme la structure de réseau reste invariante sous

déformation, l'isomorphisme (2) reste valable pour toute variété hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$.

Une observation importante est que $\Lambda_{K3^{[m]}}$ peut être vu comme un sous-réseau de $\Lambda_{24} := U^{\oplus 4} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$, le réseau de Mukai qui est pair et unimodulaire. On note $v \in \Lambda_{24}$ un élément primitif de carré $2m - 2$, qui est unique sous l'action de $O(\Lambda_{24})$. On a alors $\Lambda_{K3^{[m]}} \cong v^\perp$.

2.2.2 Type Kummer

Soit A un tore complexe de dimension 2. On considère l'image inverse $K_m(A)$ de 0 par l'application

$$\begin{aligned} A^{[m+1]} &\longrightarrow A \\ (a_0, \dots, a_m) &\longmapsto a_0 + \dots + a_m. \end{aligned}$$

Beauville a montré que c'est une variété hyperkählérienne de dimension $2m$ dont la constante de Fujiki est

$$c_{K_m(A)} = \frac{(2m)! \cdot (m+1)}{m! \cdot 2^m}.$$

Si $m = 1$, la construction nous donne la surface de Kummer de A . On appelle donc les $K_m(A)$ des variétés de Kummer généralisées. De plus, on a une application

$$\begin{aligned} K_m(A) \times A &\longrightarrow A^{[m+1]} \\ ((a_0, \dots, a_m), a) &\longmapsto (a_0 + a, \dots, a_m + a) \end{aligned}$$

qui est un morphisme étale et galoisien de groupe $(\mathbf{Z}/(m+1)\mathbf{Z})^4$. En particulier, c'est une décomposition de Beauville-Bogomolov pour $A^{[m+1]}$ (voir le théorème 2.4). Lorsque $m \geq 2$, le deuxième groupe de cohomologie est

$$H^2(K_m(A), \mathbf{Z}) \cong H^2(A, \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}\delta$$

et la structure de réseau est

$$(H^2(K_m(A), \mathbf{Z}), q_{K_m(A)}) \cong \Lambda_{K_m} := U^{\oplus 3} \oplus \langle -(2m+2) \rangle.$$

De nouveau, on dit qu'une variété hyperkählérienne est de type K_m (ou de type Kummer) si elle est déformation d'une $K_m(A)$. De même, Λ_{K_m} peut être vu comme un sous-réseau de $\Lambda_8 := U^{\oplus 4}$, un réseau pair et unimodulaire. On note $v \in \Lambda_8$ un élément primitif de carré $2m + 2$, qui est unique sous l'action de $O(\Lambda_8)$. On a alors $\Lambda_m \cong v^\perp$.

2.2.3 Exemples de O'Grady

Les deux séries d'exemples de Beauville sont construits en considérant des espaces de modules de m points sur une surface qui est une surface K3 ou un tore. Ce sont donc des faisceaux à support de dimension 0. Plus généralement, on peut considérer des espaces de modules pour certains faisceaux et obtenir des variétés hyperkähleriennes en utilisant la décomposition de Beauville-Bogomolov. O'Grady [O1] a ainsi trouvé deux autres exemples OG_6 et OG_{10} de dimensions respectives 6 et 10, avec $b_2(OG_6) = 8$ et $b_2(OG_{10}) = 24$.

3 Espace de modules marqué

3.1 Théorème de Torelli

Soit X une variété hyperkählienne. On a vu que $H^2(X, \mathbf{Z})$, muni de la forme q_X , est un réseau de signature $(3, b_2(X) - 3)$. Pour un réseau Λ fixé de signature $(3, b - 3)$, une variété hyperkählienne Λ -marquée (X, ϕ) est la donnée d'une isométrie $\phi: H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda$. On définit l'espace de modules des variétés hyperkähleriennes Λ -marquées par

$$\mathfrak{M}_\Lambda := \{(X, \phi)\} / \cong,$$

où (X, ϕ) et (X', ϕ') sont isomorphes s'il existe un morphisme biholomorphe $f: X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $\phi \circ f^* = \phi'$. C'est une définition ensembliste, mais on peut mettre sur \mathfrak{M}_Λ une structure d'espace analytique.

L'espace \mathfrak{M}_Λ est un espace de modules fin, dans le sens suivant.

Proposition 3.1 ([Hu2, Proposition 4.3]). *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählienne Λ -marquée et soit $\text{Def}(X)$ un germe d'espace analytique sur lequel il existe une déformation verselle $\mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(X)$. Il existe une application holomorphe identifiant $\text{Def}(X)$ avec un voisinage ouvert de (X, ϕ) dans \mathfrak{M}_Λ .*

La théorie des déformations nous donne le résultat suivant.

Théorème 3.2 (Bogomolov-Tian-Todorov). *L'espace de déformations locales $\text{Def}(X)$ d'une variété compacte kählienne X à fibré canonique trivial est non obstrué, c'est-à-dire qu'il est lisse de dimension $h^1(X, \mathcal{T}_X)$.*

Le théorème s'applique au cas d'une variété hyperkählérienne. Donc \mathfrak{M}_Λ , s'il est non vide, est un espace analytique lisse de dimension $b - 2$. Mais a priori, il peut y avoir des points non séparés et on va voir que c'est bien le cas.

Pour un type de déformation X fixé, on note \mathfrak{M}_X le sous-espace de modules de \mathfrak{M}_Λ paramétrant les variétés hyperkählériennes Λ -marquées de type X , qui est une réunion de composantes connexes de \mathfrak{M}_Λ . A priori, on ne sait pas si le réseau Λ détermine uniquement le type de déformation. On a par exemple $\mathfrak{M}_{K3[m]}$ qui est un sous-espace de $\mathfrak{M}_{\Lambda_{K3[m]}}$, et \mathfrak{M}_{K_m} qui est un sous-espace de $\mathfrak{M}_{\Lambda_{K_m}}$.

On considère maintenant l'application des périodes : comme $H^{2,0}(X)$ est de dimension 1 (engendré par la classe d'une forme symplectique), on peut associer à (X, ϕ) le point $x = [\phi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(X))]$ de $\mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C})$. Il doit vérifier

$$x^2 = q_X(\omega) = 0, x \cdot \bar{x} = q_X(\omega, \bar{\omega}) > 0,$$

puisque ω est une $(2, 0)$ -forme symplectique. Cette application est donc à valeurs dans le domaine des périodes

$$\mathcal{D}_\Lambda := \left\{ x \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C}) \mid x^2 = 0, x \cdot \bar{x} > 0 \right\},$$

qui, si $b \geq 3$, est une variété complexe connexe de dimension $b - 2$.

Remarque 3.3. On a en fait une autre description pour \mathcal{D}_Λ : c'est l'espace des 2-plans orientés dans $\Lambda \otimes \mathbf{R}$ sur lesquels la forme est définie positive. Un élément $x = x_1 + ix_2$ de \mathcal{D}_Λ définit $\mathbf{R}x_1 \oplus \mathbf{R}x_2$, un tel 2-plan orienté ; réciproquement, étant donné un 2-plan orienté, on prend une base orthonormée directe (x_1, x_2) et on considère $x = x_1 + ix_2$.

Finalement on a le théorème de Torelli suivant.

Théorème 3.4 ([Hu2, Theorem 1.3]). *Si \mathfrak{M}_Λ est non vide, la restriction de l'application des périodes*

$$\begin{aligned} \wp_\Lambda : \mathfrak{M}_\Lambda &\longrightarrow \mathcal{D}_\Lambda \\ (X, \phi) &\longmapsto [\phi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(X))] \end{aligned}$$

à chaque composante connexe de \mathfrak{M}_Λ est surjective, étale et génériquement injective.

3.2 Non séparation

On cite d'abord un résultat sur les fibres non séparées de l'application des périodes.

Théorème 3.5 ([Hu3, Theorem 4.3]). *Soient (X, ϕ) et (X', ϕ') des variétés hyperkähleriennes marquées non séparées dans l'espace de modules \mathfrak{M}_Λ . Alors X et X' sont birationnellement isomorphes.*

3.2.1 Flop d'Atiyah

On étudie d'abord les fibres non séparées dans le cas des surfaces K3, en suivant la méthode de [Hu1, Chapter 7]. Soit S une surface K3 contenant une courbe C rationnelle lisse de classe l . Par la formule d'adjonction on a $l^2 = -2$. (En fait pour toute classe l de carré -2 , on peut trouver une surface K3 S telle que $l \in \text{Pic}(S)$: il suffit que la période de (S, ϕ) soit dans l^\perp , et on peut conclure par la surjectivité de l'application des périodes. Dans ce cas il existe toujours une courbe rationnelle lisse C de classe $\pm l$.)

Par un théorème de Grauert-Mumford [BHPvV, Chapter III, Theorem 2.1], il existe un morphisme $S \rightarrow S_0$ qui contracte C en un point 0 . C'est une singularité double normale : il existe des coordonnées locales telles que S_0 est définie localement par $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ au voisinage de 0 .

Il existe une famille propre et plate $\mathcal{S} \rightarrow \Delta_t = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < 1\}$ de surfaces telle que la fibre centrale soit isomorphe à S_0 . Chaque \mathcal{S}_t contient une classe l_t qui est déformation de l . Localement, \mathcal{S} est définie par $x^2 + y^2 + z^2 = t$. On peut faire un changement de variable $t = u^2$ et considérer la famille de tirés en arrière $\widetilde{\mathcal{S}} \rightarrow \Delta_u = \{u \in \mathbf{C} \mid |u| < 1\}$. Il existe clairement une involution $u \mapsto -u$ de $\widetilde{\mathcal{S}}$. Pour $u \neq 0$, on a $\widetilde{\mathcal{S}}_u = \widetilde{\mathcal{S}}_{-u} = \mathcal{S}_t$ où $t = u^2$. On éclate maintenant le point singulier : $\widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{S}} \rightarrow \Delta_u$. La fibre centrale est $S \cup Q$, où Q est une quadrique isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $S \cap Q = C$. On peut contracter Q sur chacun des \mathbf{P}^1 à l'intérieur de $\widehat{\mathcal{S}}$ pour obtenir

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{\mathcal{S}} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \mathcal{S}_1 & \dashrightarrow & \mathcal{S}_2 \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & \widetilde{\mathcal{S}} &
 \end{array}$$

On obtient deux familles lisses de surfaces K3 \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 qui coïncident en dehors de $u = 0$. De plus, l'involution $u \mapsto -u$ induit un isomorphisme entre les espaces totaux $\mathcal{S}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_2$.

Le système local $H^2(\mathcal{S}_{1,u}, \mathbf{Z})$ est maintenant trivialisable, c'est-à-dire qu'il existe des isométries $\phi_u: H^2(\mathcal{S}_{1,u}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{K3}$ pour u dans Δ_u . L'involution $u \mapsto -u$ donne $\phi_{-u}: H^2(\mathcal{S}_{2,u}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{K3}$, qui est une trivialisatation pour \mathcal{S}_2 . Par la formule de Picard-Lefschetz, l'application $\phi_{-u}^{-1} \circ \phi_u: H^2(\mathcal{S}_t, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{S}_t, \mathbf{Z})$ pour $u \neq 0$ est égale à la réflexion R_{l_t} par rapport à la classe l_t , où $t = u^2$. En la composant avec ϕ_{-u} , on obtient $\phi'_u: H^2(\mathcal{S}_{2,u}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{K3}$ qui est une autre trivialisatation pour \mathcal{S}_2 , où $\phi'_u = \phi_u$ si $u \neq 0$ et $\phi'_0 = \phi_0 \circ R_l$. Les familles \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont devenues deux familles de surfaces K3 marquées qui coïncident pour $u \neq 0$, mais les fibres centrales sont (S, ϕ_0) et $(S, \phi_0 \circ R_l)$ respectivement. Ces deux paires sont non séparées dans l'espace de modules marqué, et donc dans une même fibre non séparée pour l'application des périodes. On appelle cette construction le *flop d'Atiyah* : il associe à une surface K3 marquée (S, ϕ) contenant une courbe rationnelle lisse C de classe l la surface K3 marquée $(S, \phi \circ R_l)$.

3.2.2 Contre-exemple de Debarre

Pour les variétés hyperkählériennes de type $K3^{[m]}$ avec $m \geq 2$, on peut considérer une construction analogue : soit X une variété hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$ contenant un espace projectif P de dimension m . Mukai [Mu, Proposition 3.1] a démontré que P est isotrope avec le fibré normal $\mathcal{N}_{P/X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_P^\vee$. En considérant l'éclatement $\epsilon: \hat{X} \rightarrow X$ le long de P , le diviseur exceptionnel est isomorphe à la variété d'incidence $\{(x, x^\vee) \in P \times \mathbf{P}^m \mid x \in x^\vee\}$ et peut se contracter sur \mathbf{P}^m par $\epsilon': \hat{X} \rightarrow X'$. On obtient ainsi une autre variété lisse X' et une application birationnelle $\epsilon' \circ \epsilon^{-1}: X \dashrightarrow X'$. On appelle cette construction le *flop de Mukai* de X . A priori X' peut ne pas être hyperkählérienne. Pour vérifier que X' est hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$, il suffit qu'elle soit kählérienne.

On regarde maintenant les variétés hyperkählériennes de la forme $S^{[m]}$, où S est une surface K3 contenant une courbe C rationnelle de classe l . On remarque d'abord que $C^{[m]} \subset S^{[m]}$ est isomorphe à \mathbf{P}^m : on peut plonger C dans \mathbf{P}^m par le fibré en droites $\mathcal{O}(m)$, alors chaque m points sur C engendrent un $(m-1)$ -plan dans \mathbf{P}^m . Donc $C^{[m]}$ est isomorphe à la grass-

mannienne $\mathbf{G}(m-1, \mathbf{P}^m) \cong \mathbf{P}^m$.

Supposons S projective. On prend de nouveau une déformation locale universelle $\mathcal{S} \rightarrow B$ de la paire (S, C) . On en déduit une famille propre et lisse $\mathcal{X} \rightarrow B$ de variétés hyperkähleriennes, avec $\mathcal{X}_t \cong \mathcal{S}_t^{[m]}$. Maintenant chaque \mathcal{X}_t contient un espace projectif $C_t^{[m]}$. On peut construire une famille $\mathcal{X}' \rightarrow \Delta$ telle que chaque \mathcal{X}'_t soit le flop de Mukai de \mathcal{X}_t . Il est démontré dans [D2, 3.2] que la fibre centrale \mathcal{X}'_0 , c'est-à-dire le flop de Mukai de $S^{[m]}$, est projective lorsque S l'est. Les \mathcal{X}'_t sont alors kähleriennes pour t petit dans ce cas, et par conséquent, elles sont hyperkähleriennes de type $K3^{[m]}$. Clairement \mathcal{X}_t et \mathcal{X}'_t ont la même période. On obtient ainsi une sous-variété de dimension 19 dans \mathfrak{M}_Λ qui est non séparée. Finalement, pour un t très général, on a $\text{Pic}(\mathcal{S}_t) \cong \mathbf{Z}l_t$ et $\text{Pic}(\mathcal{X}_t) \cong \mathbf{Z}l_t \oplus \mathbf{Z}\delta_t$. Le résultat de Debarre [D2, 3.1] montre que \mathcal{X}_t et \mathcal{X}'_t ne sont pas isomorphes dans ce cas. On conclut qu'il existe des variétés ayant la même période mais non isomorphes entre elles.

Debarre a aussi remarqué la construction suivante, qui coïncide avec le flop de Mukai dans certains cas. Rappelons que pour une surface $K3$ polarisée (S, H) de degré $2m$ générale avec $m \geq 2$, la classe H est en fait très ample. On a donc une immersion de S dans \mathbf{P}^{m+1} . Considérons maintenant $S^{[m]}$. Étant donnés m points généraux sur S , ils engendrent un espace projectif de dimension $m-1$ dans \mathbf{P}^{m+1} , coupant S transversalement en $2m$ points. On a ainsi une involution birationnelle $\sigma: S^{[m]} \dashrightarrow S^{[m]}$ qui associe à un élément composé de m points son complémentaire dans l'intersection.

Proposition 3.6 ([D2, théorème 4.1]). *Soit (S, H) une surface $K3$ polarisée de degré $2m$ générale avec $m \geq 2$. Notons X la variété $S^{[m]}$. L'application*

$$\sigma^*: H^2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$$

induite par σ est donnée par l'opposé de la réflexion par rapport à la classe $h - \delta$, où h est la classe sur X induite par H . La classe $h - \delta$ est de carré 2.

3.2.3 Contre-exemple de Namikawa

Soit A un tore complexe de dimension 2 très général, c'est-à-dire avec $\text{Pic}(A) = 0$. On peut considérer son tore dual A^\vee et construire les variétés hyperkähleriennes de type Kummer $K_m(A)$ et $K_m(A^\vee)$. Il existe une

isométrie de Hodge entre $H^2(A, \mathbf{Z})$ et $H^2(A^\vee, \mathbf{Z})$, donc aussi une isométrie de Hodge entre $H^2(K_m(A), \mathbf{Z})$ et $H^2(K_m(A^\vee), \mathbf{Z})$, c'est-à-dire que les deux variétés ont la même période. Mais Namikawa a montré le résultat suivant.

Proposition 3.7 ([N]). *Lorsque A et A^\vee ne sont pas isomorphes, $K_m(A)$ et $K_m(A^\vee)$ ne sont pas birationnellement isomorphes.*

Dans chaque composante connexe de \mathfrak{M}_{K_m} , il existe une variété hyperkählérienne marquée (X, ϕ) qui est de la forme $K_m(A)$ avec $\text{Pic}(A) = 0$. On note (X', ϕ') la variété $K_m(A^\vee)$ avec le marquage associé. Si (X, ϕ) et (X', ϕ') (ou $(X', -\phi')$) étaient dans la même composante connexe, comme elles ont la même période mais ne sont pas isomorphes, elles seraient non séparées dans l'espace de modules marqué. Par le théorème 3.5, X et X' doivent être birationnellement isomorphes, une contradiction. De plus (X, ϕ) et $(X, -\phi)$ ne sont jamais dans une même composante connexe (voir la section 3.4.1). On obtient alors au moins 4 composantes qui contiennent (X, ϕ) , $(X, -\phi)$, (X', ϕ') et $(X', -\phi')$ respectivement.

3.3 Cône kählérien et cône mobile

Rappelons que sur une variété kählérienne X , une forme de Kähler est une forme réelle, de type $(1, 1)$ et fermée. En particulier elle détermine une classe de Kähler α dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R}) := H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbf{R})$. Les classes de Kähler forment un cône \mathcal{K}_X dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, que l'on appelle le *cône kählérien* de X . C'est un cône convexe et ouvert.

Soit maintenant X une variété hyperkählérienne. Comme on a la forme de Beauville-Fujiki sur $H^2(X, \mathbf{Z})$ et que celle-ci est strictement positive sur les formes de Kähler, on peut définir le *cône positif* \mathcal{C}_X comme celle des deux composantes connexes de $\{\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \mid \alpha^2 > 0\}$ contenant \mathcal{K}_X . On a de plus une description numérique de \mathcal{K}_X démontrée par Boucksom.

Théorème 3.8 ([Bo, théorème 1.2]). *Le cône \mathcal{K}_X est composé exactement des éléments $\alpha \in \mathcal{C}_X$ qui vérifient $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle $C \subset X$.*

En particulier, \mathcal{K}_X est découpé par des hyperplans de la forme δ^\perp dans \mathcal{C}_X , où δ est la classe d'une courbe rationnelle.

La géométrie de \mathcal{C}_X et \mathcal{K}_X est étroitement liée à la non séparation de l'espace de modules marqué. On a un premier résultat.

Théorème 3.9 ([M, Theorem 1.2]). *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählérienne marquée. On considère l'application des périodes restreinte à une composante $\wp_\Lambda: \mathfrak{M}_\Lambda^0 \rightarrow \mathcal{D}_\Lambda$. Alors la fibre contenant (X, ϕ) consiste en un seul point si et seulement si $\mathcal{K}_X = \mathcal{C}_X$.*

Cette condition $\mathcal{K}_X = \mathcal{C}_X$ est notamment vérifiée lorsqu'il n'existe pas de courbe rationnelle sur X , en particulier si $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$ est trivial, ou encore si $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$ est de rang 1 engendré par un élément de carré positif [Hu3, Corollary 7.2]. En particulier la non séparation peut seulement avoir lieu en codimension ≥ 1 .

Remarque 3.10. Soit S une surface K3. On suppose que (S, ϕ) est dans une fibre non séparée, c'est-à-dire qu'il existe des courbes rationnelles C sur S , ou de manière équivalente, des classes δ de carré -2 dans $H^{1,1}(S, \mathbf{Z})$. Les hyperplans δ^\perp coupent \mathcal{C}_S en une réunion de domaines disjoints. On appelle ces hyperplans des *murs* et ces domaines des *chambres*. Clairement, le cône kählérien \mathcal{K}_S est une chambre par le théorème 3.8. La construction de la section 3.2.1 montre que l'on peut obtenir un autre point (S, ϕ') dans la même fibre en fixant une classe δ (plus précisément une courbe rationnelle C de classe $\pm\delta$) et en prenant le flop d'Atiyah. L'isométrie induite sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ est donnée par la réflexion R_δ , c'est-à-dire $\phi' = \phi \circ R_\delta$.

On appelle le sous-groupe $W_S \subset O(H^2(S, \mathbf{Z}))$ engendré par les R_δ pour tout élément $\delta \in H^{1,1}(S, \mathbf{Z})$ de carré -2 le *groupe de Weyl*. Le groupe W_S agit librement et transitivement sur les chambres [Hu1, Chapter 8, Proposition 5.5]. On a en particulier

$$\overline{\mathcal{C}_S} = \overline{\coprod_{\Phi \in W_S} \Phi(\mathcal{K}_S)}.$$

Des marquages ϕ_1 et ϕ_2 sur S sont identifiés lorsqu'il existe un automorphisme φ tel que $\varphi^* = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$. Par le théorème de Torelli, un tel φ existe si et seulement si $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ fixe le cône kählérien, c'est-à-dire que $\phi_2^{-1} \circ \phi_1(\mathcal{K}_S)$ et \mathcal{K}_S donnent la même chambre pour le marquage ϕ fixé. Donc les surfaces K3 marquées (les marquages non isomorphes sur S) dans une fibre non séparée sont en bijection avec les chambres. En particulier, on peut obtenir tous ces marquages à partir d'un ϕ fixé, en le composant avec un élément de W_S .

Pour une variété hyperkählérienne en général, on essaye de donner des définitions des murs et chambres en généralisant celles d'une surface K3.

Définition 3.11. Soit X une variété hyperkählérienne. Un diviseur effectif E est dit *exceptionnel* si, en écrivant le support de E en $\{E_1, \dots, E_r\}$, la matrice $(E_i \cdot E_j)_{ij}$ est définie négative. Soit δ la classe de E dans $H^2(X, \mathbf{Z})$. On dit alors que δ^\perp est un *mur exceptionnel*. Les murs exceptionnels découpent \mathcal{C}_X en des domaines disjoints que l'on appelle des *chambres exceptionnelles*.

En particulier, le cône \mathcal{K}_X est contenu dans l'une de ces chambres exceptionnelles, que l'on appelle la *chambre exceptionnelle fondamentale* $\mathcal{F}\mathcal{E}_X$. Le *groupe de Weyl* est le sous-groupe $W_X \subset O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ engendré par les réflexions R_δ pour δ exceptionnelle. De nouveau W_X agit librement et transitivement sur les chambres exceptionnelles.

En dimension supérieure, on n'a pas forcément que $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}\mathcal{E}_X$ comme pour les surfaces $K3$, puisqu'il peut y avoir des variétés birationnelles ayant la même période. On note \mathcal{BK}_X la réunion de tous les $f^*(\mathcal{K}_Y)$ pour $f: X \dashrightarrow Y$ isomorphisme birationnel sur une autre variété hyperkählérienne Y , que l'on appelle le *cône kählérien birationnel* de X . Remarquons que \mathcal{BK}_X n'est pas nécessairement convexe.

Théorème 3.12 ([M, Proposition 5.6]). *On a*

$$\mathcal{BK}_X \subset \mathcal{F}\mathcal{E}_X \subset \overline{\mathcal{BK}_X}.$$

Donc la chambre exceptionnelle fondamentale $\mathcal{F}\mathcal{E}_X$ est stable par les morphismes birationnels. De plus elle est divisée en des domaines plus petits, et l'on peut passer de l'un à l'autre par des morphismes birationnels.

Définition 3.13. Pour un élément δ dans $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$, on dit que δ^\perp est un *mur* s'il ne rencontre pas $\Phi(\mathcal{BK}_X)$ pour tout $\Phi \in W_X$. Les murs découpent le cône positif \mathcal{C}_X en des domaines disjoints que l'on appelle des *chambres*.

En particulier, le cône kählérien \mathcal{K}_X est une chambre. On peut maintenant généraliser le théorème 3.9 et décrire la fibre de l'application des périodes en utilisant les chambres.

Théorème 3.14 ([M, Theorem 5.16]). *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählérienne marquée. On considère l'application des périodes restreinte à une composante $\wp_\Lambda: \mathfrak{M}_\Lambda^0 \rightarrow \mathcal{D}_\Lambda$. Alors les points dans la fibre contenant (X, ϕ) sont en bijection avec les chambres dans \mathcal{C}_X .*

On a déjà vu que les murs pour une surface $K3$ sont des hyperplans δ^\perp pour δ classe de courbe rationnelle. Les murs pour une variété hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$ et de type K_m sont aussi connus, par les travaux de Bayer-Macri [BM, Section 12] pour le cas $K3^{[m]}$, et de Yoshioka [Y] pour le cas Kummer. On cite les résultats suivants d'un article de Mongardi.

Théorème 3.15 ([Mo1, Theorem 1.3, Theorem 1.4]). *Soit X une variété hyperkählérienne.*

1. *Si X est de type $K3^{[m]}$, on voit $\Lambda_{K3^{[m]}}$ comme le sous-réseau v^\perp dans Λ_{24} avec $v^2 = 2m - 2$. Pour un élément $\delta \in H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$ avec $\delta^2 < 0$, on note \bar{T} la saturation du réseau $\langle \delta, v \rangle$ dans Λ_{24} . Alors l'hyperplan δ^\perp est un mur si et seulement si*
 - *soit il existe $w \in \bar{T}$ avec $w^2 = -2$ et $0 \leq w \cdot v \leq m - 1$;*
 - *soit il existe $w \in \bar{T}$ avec $w^2 \geq 0$ et $w^2 < w \cdot v \leq m - 1$.**De plus, δ^\perp est un mur exceptionnel si et seulement s'il existe $w \in \bar{T}$ tel que $w^2 = -2$ et $w \cdot v = 0$, ou $w^2 = 0$ et $w \cdot v = 1$ ou 2 .*
2. *Si X est de type K_m , on voit Λ_{K_m} comme le sous-réseau v^\perp dans Λ_8 avec $v^2 = 2m + 2$. Pour un élément $\delta \in H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$, on note \bar{T} la saturation du réseau $\langle \delta, v \rangle$ dans Λ_8 . Alors l'hyperplan δ^\perp est un mur si et seulement s'il existe $w \in \bar{T}$ avec $w^2 \geq 0$ et $w^2 < w \cdot v \leq m + 1$. De plus, δ^\perp est un mur exceptionnel si et seulement s'il existe $w \in \bar{T}$ avec $w^2 = 0$ et $w \cdot v = 1$ ou 2 .*

Remarque 3.16. La classe δ peut être déterminée à partir de w : c'est un multiple de la projection de w sur v^\perp , c'est-à-dire un multiple de $w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$.

Notons $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})_{\mathbf{R}} := H^{1,1}(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R}$, qui est un sous-espace vectoriel réel de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. L'inclusion est en générale stricte. Le cône ample $\text{Amp}(X)$ est l'enveloppe convexe dans $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})_{\mathbf{R}}$ de toutes les classes amples, qui est convexe et ouvert. Par le théorème de Kodaira on a

$$\mathcal{K}_X \cap H^{1,1}(X, \mathbf{Z})_{\mathbf{R}} = \text{Amp}(X).$$

Rappelons qu'un fibré en droites L est dit *mobile* si le lieu base $\text{Bs}(|L|) := \bigcap_{s \in H^0(X, L)} \text{div}(s)$ du système linéaire $|L|$ est de codimension ≥ 2 . De même,

le cône *mobile* $\text{Mov}(X)$ est l'enveloppe convexe dans $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})_{\mathbf{R}}$ de toutes les classes mobiles. On a aussi le cône *mobile ouvert* $\mathring{\text{Mov}}(X)$ qui est l'intérieur de $\text{Mov}(X)$.

Théorème 3.17 ([M, Lemma 6.22]). *On a*

$$\mathcal{FE}_X \cap H^{1,1}(X, \mathbf{Z})_{\mathbf{R}} = \mathring{\text{Mov}}(X).$$

Les descriptions du cône kählérien et de la chambre exceptionnelle fondamentale nous donnent donc des descriptions du cône ample et du cône mobile ouvert. Par exemple, le cône mobile ouvert $\mathring{\text{Mov}}(X)$ est invariant par morphismes birationnels.

3.4 Groupe de monodromie

Dans ce mémoire, on s'intéresse seulement à l'action de monodromie sur $H^2(X, \mathbf{Z})$. Dans la littérature, notre $\text{Mon}(X)$ est parfois noté $\text{Mon}^2(X)$.

Définition 3.18. Soient X et X' des variétés hyperkähleriennes.

- Une isométrie $\varphi: H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X', \mathbf{Z})$ est un *transport parallèle*, s'il existe une famille propre et lisse $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$ de variétés hyperkähleriennes et un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow B$ avec $\mathcal{X}_{\gamma(0)} = X$ et $\mathcal{X}_{\gamma(1)} = X'$, tels que φ est induite par le transport parallèle du système local $R^2\pi_*\mathbf{Z}$ le long de γ .
- Une isométrie $\varphi \in O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ est dite une *monodromie* si elle est un transport parallèle. Le *groupe de monodromie* $\text{Mon}(X)$ est le sous-groupe de $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ engendré par les monodromies.

Les transports parallèles et le groupe de monodromie sont cruciaux dans l'étude des problèmes de type Torelli. Pour une variété hyperkählienne X fixée, le groupe d'isométries $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ agit transitivement sur les composantes connexes de \mathfrak{M}_X avec noyau $\text{Mon}(X)$: des marquages (X, ϕ_1) et (X, ϕ_2) sont dans une même composante connexe si et seulement si $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est dans $\text{Mon}(X)$. Donc le nombre de composantes connexes de \mathfrak{M}_X est l'indice de $\text{Mon}(X)$ dans $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$. En admettant le théorème 3.4, notre but est de déterminer $\text{Mon}(X)$ dans $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$.

3.4.1 Résultats généraux

Il y a une première condition nécessaire pour qu'une isométrie soit une monodromie. Soit Λ un réseau indéfini de signature (p, q) . Considérons la

partie

$$\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda = \left\{ x \in \Lambda \otimes \mathbf{R} \mid x^2 > 0 \right\}.$$

Lemme 3.19. *On a un isomorphisme $H^p(\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. L'action sur $H^p(\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda, \mathbf{Z})$ définit la norme spinorielle*

$$\sigma: O(\Lambda) \longrightarrow \{\pm 1\}.$$

On note $O^+(\Lambda) \subset O(\Lambda)$ le noyau. La réflexion $R_v: x \mapsto x - 2\frac{x \cdot v}{v \cdot v}v$ par rapport à un élément v de carré 2 ou -2 est dans $O(\Lambda)$ et a pour norme spinorielle 1 si $v^2 = -2$ et -1 si $v^2 = 2$.

Démonstration. Notons $b = p + q$ la dimension de Λ . Prenons une base e_1, \dots, e_b orthonormale de $\Lambda \otimes \mathbf{R}$ telle que, pour un élément $x = \sum_{i=1}^b x_i e_i$, on ait $x^2 = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_b^2$. Considérons

$$\begin{aligned} \psi: \tilde{\mathcal{C}}_\Lambda \times I &\longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}_\Lambda \\ \left(\sum_{i=1}^b x_i e_i, t \right) &\longmapsto \sum_{i=1}^p x_i e_i + (1-t) \sum_{i=p+1}^b x_i e_i \end{aligned}$$

qui est une rétraction de $\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda$ sur $W \setminus \{0\}$, où W est le sous-espace vectoriel engendré par e_1, \dots, e_p . On conclut que

$$H^p(\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda, \mathbf{Z}) \cong H^p(W \setminus \{0\}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}.$$

Pour un élément v non nul, la réflexion R_v est dans $O(\Lambda)$ si et seulement si $|v^2| = 2$. Si $v^2 = 2$, on peut choisir les e_i tels que $v \in W$, alors R_v agit par $-\text{Id}$ sur $H^p(W \setminus \{0\}, \mathbf{Z})$; si $v^2 = -2$, on peut de même choisir les e_i tels que $v \in W^\perp$, alors R_v agit par Id sur $H^p(W \setminus \{0\}, \mathbf{Z})$. \square

Remarque 3.20. En particulier, lorsque $p \geq 2$ la partie $\tilde{\mathcal{C}}_\Lambda$ est connexe.

Dans notre cas, on a $p = 3$ et la norme spinorielle d'une monodromie est toujours 1. Donc $\text{Mon}(X)$ est contenu dans $O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$. De plus on remarque que $-\text{Id}$ est un composé de réflexions dont trois sont de norme spinorielle -1 . Donc $\sigma(-\text{Id}) = -1$. En particulier (X, ϕ) et $(X, -\phi)$ ne sont jamais dans une même composante connexe de l'espace de modules marqué.

Lorsque $\text{Mon}(X)$ est égal à $O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$, le plus grand sous-groupe possible, \mathfrak{M}_X admet deux composantes connexes, échangées par le changement de signe du marquage. On a le résultat suivant.

Théorème 3.21 (Théorème de Torelli birationnel, [Hu2, Corollary 6.3]). *Soit X un type de déformation de variété hyperkählérienne. Lorsque $\text{Mon}(X) = O^+(H^2(X, \mathbf{Z}))$, des variétés hyperkählériennes X_1, X_2 de type X sont birationnellement isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie de Hodge*

$$H^2(X_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_2, \mathbf{Z}).$$

On peut voir qu'une monodromie doit respecter les murs dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ ainsi que les murs exceptionnels. Notamment, elle envoie la chambre exceptionnelle fondamentale \mathcal{FE}_X sur une autre chambre exceptionnelle et le cône kählérien \mathcal{K}_X sur une chambre dedans. Donc, lorsque l'on connaît les murs explicitement, on possède des restrictions supplémentaires sur $\text{Mon}(X)$.

Dans la suite, lorsqu'on a une variété X hyperkählérienne Λ -marquée, on confond $\text{Mon}(X)$ avec son image dans $O(\Lambda)$ par le marquage : on voit $\text{Mon}(X)$ comme un sous-groupe de $O^+(\Lambda)$.

3.4.2 Surface K3

On regarde le cas d'une surface K3 marquée (S, ϕ) .

Théorème 3.22 ([Hu1, Chapter 7, Proposition 5.5]). *Soit S une surface K3. On a*

$$\text{Mon}(S) = O^+(\Lambda).$$

Par conséquent, il n'existe que deux composantes \mathfrak{M}^+ et \mathfrak{M}^- dans l'espace de modules marqué, échangées par le changement de signe du marquage.

Démonstration. Il suffit de montrer que $O^+(\Lambda) \subset \text{Mon}(S)$.

Pour chaque courbe rationnelle C dans S de classe δ , on peut considérer le flop d'Atiyah S' . Les surfaces S et S' sont isomorphes et déformation équivalentes, et l'isométrie induite sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ est un transport parallèle. Par la formule de Picard-Lefschetz, cette isométrie est la réflexion R_δ par rapport à δ . Par un résultat général dû à Wall, Ebeling et Kneser, le groupe $O^+(\Lambda)$ est engendré par les R_δ . On a donc l'inclusion. \square

Dans le cas d'une variété hyperkählérienne Λ -marquée de dimension ≥ 4 , comme Λ peut ne plus être unimodulaire, la situation devient plus compliquée.

3.4.3 Type $K3^{[m]}$

Notons $\Lambda = \Lambda_{K3^{[m]}}$ le réseau $U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \langle \delta \rangle$ pour $m \geq 2$, avec $\delta^2 = -(2m - 2)$. Ce n'est pas un réseau unimodulaire : on a $D(\Lambda) \cong \mathbf{Z}/(2m - 2)\mathbf{Z}$, groupe cyclique engendré par $\delta_* = \frac{1}{2m-2}\delta$. On considère le sous-groupe $\widehat{O}(\Lambda)$ des éléments dont l'action sur $D(\Lambda)$ est $\pm \text{Id}$ et on note $\widehat{O}^+(\Lambda)$ son intersection avec $O^+(\Lambda)$. Markman a obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.23 ([M, Lemma 9.2]). *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$ marquée. Le groupe de monodromie $\text{Mon}(X)$ est égal à $\widehat{O}^+(\Lambda)$.*

Le groupe de monodromie étant déterminé, on peut calculer le nombre de composantes connexes de l'espace de modules.

Proposition 3.24. *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$ marquée. L'indice de $\text{Mon}(X)$ dans $O^+(\Lambda)$ est $2^{\max(\rho(m-1)-1, 0)}$.*

Démonstration. Considérons l'application canonique

$$\chi: O(\Lambda) \longrightarrow O(D(\Lambda)).$$

Le groupe $D(\Lambda)$ est cyclique. Comme Λ est indéfini et de rang ≥ 3 , χ est surjective par le lemme 1.4. Par définition, $\widehat{O}^+(\Lambda)$ est le noyau de l'application composée

$$\bar{\chi}: O^+(\Lambda) \longrightarrow O(D(\Lambda)) \longrightarrow O(D(\Lambda))/\{\pm \text{Id}\}.$$

Si $\bar{\varphi} \in O(D(\Lambda))$ et $\chi(\varphi) = \bar{\varphi}$ avec $\varphi \in O(\Lambda)$, on a $\sigma(-\varphi) = -\sigma(\varphi)$. Alors $\sigma(\varphi) \cdot \varphi$ est toujours dans $O^+(\Lambda)$. Donc son image par $\bar{\chi}$ est dans la classe de $\bar{\varphi}$. On conclut que $\bar{\chi}$ est surjective.

Par le lemme 1.6, on a $O(D(\Lambda)) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\rho(m-1)}$. Donc l'indice de $\text{Mon}(X)$ dans $O^+(\Lambda)$ est $2^{\max(\rho(m-1)-1, 0)}$. \square

On conclut que pour les variétés hyperkählérienne de type $K3^{[m]}$, l'espace de modules marqué $\mathfrak{M}_{K3^{[m]}}$ a $2^{\max(\rho(m-1)-1, 0)}$ paires de composantes connexes. En particulier le théorème de Torelli birationnel vaut si et seulement si m est de la forme $p^a + 1$ pour un nombre premier p et un entier $a \geq 0$.

3.4.4 Type Kummer

Notons $\Lambda = \Lambda_{K_m}$ le réseau $U^{\oplus 3} \oplus \langle \delta \rangle$ pour $m \geq 2$, avec $\delta^2 = -(2m+2)$. On a $D(\Lambda) \cong \mathbf{Z}/(2m+2)\mathbf{Z}$, un groupe cyclique engendré par $\delta_* = \frac{1}{2m+2}\delta$. On prend de nouveau $\widehat{O}^+(\Lambda)$ le sous-groupe de $O^+(\Lambda)$ dont l'action sur $D(\Lambda)$ est $\pm \text{Id}$.

D'abord regardons un phénomène. Si on prend un tore complexe A isomorphe à son dual A^\vee , on obtient un automorphisme φ de $H^2(A, \mathbf{Z})$ qui est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur chacune des 3 composantes U . Il induit une isométrie sur $H^2(K_m(A), \mathbf{Z})$ que l'on note aussi φ . Par l'exemple de Namikawa, on sait que $(K_m(A), \varphi)$ et $(K_m(A^\vee), \varphi') = (K_m(A), \varphi \circ \phi)$ ne sont pas déformation équivalentes. Donc φ n'est pas dans $\text{Mon}(K_m(A))$. On remarque aussi que φ peut s'écrire comme le composé de 3 réflexions R_v avec $v^2 = -2$, donc $\sigma(\varphi) = 1$ et $\chi(\varphi) = \text{Id}$, c'est-à-dire $\varphi \in \widehat{O}^+(\Lambda) \setminus \text{Mon}(X)$.

Le groupe de monodromie $\text{Mon}(X)$ est en fait un sous-groupe d'indice 2 de $\widehat{O}^+(\Lambda)$, qui est défini comme suit. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \det \cdot \chi: \widehat{O}^+(\Lambda) &\longrightarrow \{\pm \text{Id}\} \\ \varphi &\longmapsto \det(\varphi) \cdot \chi(\varphi). \end{aligned}$$

C'est une application surjective puisque R_v pour $v^2 = -2$ est dans $\widehat{O}^+(\Lambda)$ et vérifie $\det(R_v) = -1$ et $\chi(R_v) = \text{Id}$. On note \mathcal{N} son noyau, qui est d'indice 2 dans $\widehat{O}^+(\Lambda)$.

Théorème 3.25 ([Mo1, Theorem 2.3]). *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählérienne de type K_m marquée. Le groupe de monodromie $\text{Mon}(X)$ est égal à \mathcal{N} .*

Remarque 3.26. Markman a montré que $\text{Mon}(X) \cap \widehat{O}^+(\Lambda) = \mathcal{N}$. Puis Mongardi a montré que $\text{Mon}(X)$ est inclus dans $\widehat{O}^+(\Lambda)$ en utilisant le fait que $\text{Mon}(X)$ respecte les murs. Plus précisément, soit X une variété hyperkählérienne telle que δ est dans $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$. On vérifie par le théorème 3.15 que δ^\perp est un mur exceptionnel. En effet, si l'on note $\delta = e_1 - (m+1)e_2$ et $v = e_1 + (m+1)e_2$, alors $w = e_2$ est un élément satisfaisant les conditions. Donc pour $\varphi \in \text{Mon}(X)$, l'image $\varphi(\delta)$ doit aussi donner un mur exceptionnel. On peut écrire

$$\varphi(\delta) = 2(m+1) \cdot x + a \cdot \delta$$

et conclure que $\frac{1}{2(m+1)}(\varphi(\delta) + v)$ ou $\frac{1}{2(m+1)}(\varphi(\delta) - v)$ doit être un élément entier. Donc $a \equiv \pm 1$ modulo $2(m+1)$, l'isométrie φ est bien dans $\widehat{O}^+(\Lambda)$.

Proposition 3.27. *Soit (X, ϕ) une variété hyperkählérienne de type K_m marquée. L'indice de $\text{Mon}(X)$ dans $O^+(\Lambda)$ est $2^{\rho(m+1)}$.*

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 3.24, l'indice de $\widehat{O}^+(\Lambda)$ dans $O^+(\Lambda)$ est l'indice de $\{\pm 1\}$ dans $O(D(\Lambda))$. Toujours par le lemme 1.6, on a $O(D(\Lambda)) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\rho(m+1)}$. Donc l'indice de $\text{Mon}(X) = \mathcal{N}$ dans $O^+(\Lambda)$ est $2^{\rho(m+1)}$. \square

En particulier le théorème de Torelli birationnel ne vaut jamais, un fait qui s'est déjà manifesté dans l'exemple de Namikawa.

Remarque 3.28. Dans tous les trois cas que l'on a considérés, $\text{Mon}(X)$ est un sous-groupe distingué de $O(\Lambda)$ et donc ne dépend pas de X . En général, on ne sait pas si $\text{Mon}(X)$ est toujours un sous-groupe distingué de $O(\Lambda)$.

4 Espace de modules polarisé

4.1 Définition et propriétés

On considère des variétés hyperkählériennes polarisées, c'est-à-dire avec la donnée d'une classe ample. Fixons un réseau Λ de signature $(3, b-3)$. Une *type de polarisation* τ est une $O(\Lambda)$ -orbite de Λ contenant un élément $h \in \Lambda$ primitif et de carré positif. Il existe un espace de modules grossier quasi-projectif \mathfrak{M}_τ pour les variétés hyperkählériennes polarisées de type τ , par un théorème général de Viehweg ([Vi]). On peut aussi déduire de la surjectivité de l'application des périodes que ces espaces sont non vides lorsque l'espace de modules marqué \mathfrak{M}_Λ l'est.

On parle maintenant d'un *transport parallèle polarisé* entre des variétés hyperkählériennes polarisées (X, H) et (X', H') , plus précisément une isométrie $\varphi: H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X', \mathbf{Z})$ induite par un transport parallèle du système local $R^2\pi_*\mathbf{Z}$ le long d'un chemin γ dans une famille propre et lisse $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$, avec la condition supplémentaire qu'il existe une section h plate de $R^2\pi_*\mathbf{Z}$ telle que $h(\gamma(0)) = H$, $h(\gamma(1)) = H'$ et $h(b)$ soit une classe ample dans $H^{1,1}(\mathcal{X}_b, \mathbf{Z})$ pour tout $b \in B$. On note $\text{Mon}(X, H)$ le sous-groupe de $O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ contenant les transports parallèles polarisés.

On a le résultat suivant qui caractérise les transports parallèles polarisés.

Théorème 4.1 ([M, Corollary 7.4]). *Soit ϕ un transport parallèle. Alors ϕ est un transport parallèle polarisé si et seulement si $f(H_1) = H_2$.*

Fixons maintenant un élément h de type τ . On se donne une variété hyperkählérienne polarisée (X, H, ϕ) avec $\phi(H) = h$. On peut considérer toutes les (X', H', ϕ') qu'on peut obtenir par transport parallèle à partir de (X, H, ϕ) . Par le théorème 4.1, on sait que $\phi'(H') = h$ est toujours vérifié. Ces variétés forment une composante connexe de l'espace de modules marqué polarisé que l'on notera $\mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}^0$ (le 0 en exposant signifie que c'est une composante connexe ; en effet, il existe un espace marqué polarisé total $\mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}$). De plus on a une application d'oubli $\pi: \mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}^0 \rightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda}$ qui est obtenue en oubliant la polarisation. L'application des périodes \wp_{Λ} sur \mathfrak{M}_{Λ} composée avec π nous donne une application

$$\begin{array}{ccc} \wp: \mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}^0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\Lambda} \\ & \searrow \pi & \nearrow \wp_{\Lambda} \\ & & \mathfrak{M}_{\Lambda} . \end{array}$$

Puisque H est de type $(1, 1)$, les périodes x doivent vérifier $x \cdot h = 0$. Donc \wp est à image dans

$$\mathcal{D}_h := \left\{ x \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C}) \mid x \cdot h = x^2 = 0, x \cdot \bar{x} > 0 \right\}.$$

Comme \mathcal{D}_h a deux composantes connexes échangées par la conjugaison complexe, on peut supposer que \wp est à image dans l'une d'elles, notée \mathcal{D}_h^+ .

On voudrait maintenant enlever les marquages. Étant donné (X, H, ϕ) dans $\mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}^0$, notons $\text{Mon}(X, h) \subset O(\Lambda)$ l'image de $\text{Mon}(X, H)$ par ϕ . Par le théorème 4.1, on sait que $\text{Mon}(X, h) = \text{Mon}(X) \cap O(\Lambda, h)$. En particulier le groupe $\text{Mon}(X, h)$ ne dépend pas du choix de (X, H, ϕ) dans $\mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}^0$. Pour une variété hyperkählérienne polarisée (X, H) et des marquages ϕ_1, ϕ_2 tels que $\phi_1(H) = \phi_2(H) = h$, on a $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 \in \text{Mon}(X, H)$. On peut passer au

quotient et obtenir

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\Lambda, \tau}^0 & \xrightarrow{\wp} & \mathcal{D}_h^+ \\ \downarrow / \cong & & \downarrow / \text{Mon}(X, h) \\ \mathfrak{M}_{\tau}^0 & \xrightarrow{\wp_{\tau}} & \mathcal{P}_{\tau} \end{array}$$

où \mathfrak{M}_{τ}^0 est une composante connexe de \mathfrak{M}_{τ} , et le quotient

$$\mathcal{P}_{\tau} := \mathcal{D}_h^+ / \text{Mon}(X, h)$$

est une variété quasi-projective normale irréductible ([M, Section 8]). Remarquons que l'on a en fait $\mathcal{P}_{\tau} = \mathcal{D}_h^+ / \pm \text{Mon}(X, h)$, puisque $-\text{Id}$ agit trivialement sur l'espace projectif. On appelle \wp_{τ} l'application des périodes polarisée. On a un théorème de Torelli polarisé.

Théorème 4.2 ([M, Theorem 8.4]). *La restriction de l'application des périodes à chaque composante connexe de \mathfrak{M}_{τ}*

$$\wp_{\tau}: \mathfrak{M}_{\tau}^0 \longrightarrow \mathcal{P}_{\tau}$$

est une immersion ouverte d'image un ouvert de Zariski dense.

On peut aussi déterminer l'image $\wp_{\tau}(\mathfrak{M}_{\tau}^0)$ dans \mathcal{P}_{τ} . Remarquons d'abord que pour tout $\delta \in h^{\perp}$, l'image de l'hyperplan δ^{\perp} dans le quotient par $\pm \text{Mon}(X, h)$ est un diviseur dans \mathcal{P}_{τ} . On l'appelle le *diviseur de Heegner* pour δ et on le note \mathcal{H}_{δ} . Remarquons qu'un diviseur de Heegner défini par un δ est nécessairement irréductible. D'ailleurs on voit que des classes $\delta_1, \delta_2 \in h^{\perp}$ définissent le même diviseur de Heegner si et seulement si elles sont dans la même $\pm \text{Mon}(X, h)$ -orbite.

Proposition 4.3. *Le complémentaire de l'image de $\wp_{\tau}: \mathfrak{M}_{\tau}^0 \rightarrow \mathcal{P}_{\tau}$ est la réunion*

$$\bigcup_{\substack{\delta \in h^{\perp} \\ \delta^{\perp} \text{ est un mur}}} \mathcal{H}_{\delta}.$$

Démonstration. Clairement, si on a $\wp_{\tau}(X, H) \in \mathcal{H}_{\delta}$ pour une variété hyperkählérienne polarisée, la classe h est contenue dans δ^{\perp} qui est un mur pour X . Mais h étant une classe ample, elle ne peut pas être dans δ^{\perp} , une contradiction.

Réciproquement, soit x un élément dans $\mathcal{D}_h^+ \setminus \bigcup \delta^\perp$. On cherche une variété hyperkählérienne polarisée de période x . Par la surjectivité de l'application des périodes marquée, il existe (X, ϕ) avec $\wp_\Lambda(X, \phi) = x$. Comme $x \cdot h = 0$, la classe $\phi^{-1}(h)$ est dans $H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$. Quitte à changer ϕ en $-\phi$, on peut supposer que $\phi^{-1}(h)$ est dans le cône positif \mathcal{C}_X . Comme $\delta \cdot h \neq 0$ pour tout δ , la classe $\phi^{-1}(h)$ est dans une chambre \mathcal{K}_0 . On peut conclure par la bijection entre la fibre $\wp_\Lambda^{-1}(x)$ et les chambres dans \mathcal{C}_X : il existe une isométrie $\varphi \in W_X \subset O(H^2(X, \mathbf{Z}))$ et un morphisme birationnel $f: X \dashrightarrow Y$ tels que $\varphi \circ f^*(\mathcal{K}_Y) = \mathcal{K}_0$. La classe $(\phi \circ \varphi \circ f^*)^{-1}(h)$ est dans le cône kählérien \mathcal{K}_Y de Y , donc on peut trouver un fibré en droites H ample sur Y . On a effectivement $\wp_\tau(Y, H) = x$. \square

Remarque 4.4. On peut aussi regrouper les diviseurs de Heegner selon leur degré : pour $\delta \in h^\perp$, on note K le réseau $\langle h, \delta \rangle$ et on définit le degré de \mathcal{H}_δ comme le discriminant de K^\perp

$$d = \left| \text{disc}(K^\perp) \right| = \left| \frac{\delta^2}{\text{div}_{h^\perp}(\delta)^2} \cdot \text{disc}(h^\perp) \right|.$$

Alors \mathcal{H}_d est la réunion de tous les \mathcal{H}_δ avec degré d . On l'appelle aussi un diviseur de Heegner (mais il n'est pas nécessairement irréductible).

4.2 Nombre de composantes

L'étude des espaces de modules polarisés repose essentiellement sur les groupes de monodromie polarisés. On fixe toujours un $h \in \tau$. Le théorème 4.1 nous dit que $\text{Mon}(X, h) = \text{Mon}(X) \cap O(\Lambda, h)$. On suppose de plus que $\text{Mon}(X)$ est un sous-groupe distingué de $O(\Lambda)$. On a le théorème suivant.

Théorème 4.5. *Lorsque $\text{Mon}(X)$ est un sous-groupe distingué de $O(\Lambda)$, le nombre de composantes connexe de \mathfrak{M}_τ est égal à*

$$[O(\Lambda) : O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X)],$$

où $O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X)$ est le sous-groupe $\{ab \mid a \in O(\Lambda, h), b \in \text{Mon}(X)\}$ de $O(\Lambda)$. C'est aussi le nombre de $\text{Mon}(X)$ -orbites dans τ .

Démonstration. Étant donnée une variété hyperkählérienne polarisée (X, H) , on considère tous les marquages possibles ϕ tels que $\phi(H) = h$. Pour un

tel ϕ fixé, les autres marquages sont de la forme $\varphi \circ \phi$ avec $\varphi \in O(\Lambda, h)$. L'ensemble de tels marquages peut donc être identifié avec $O(\Lambda, h)$. De plus, des marquages ϕ et ϕ' sont dans la même composante connexe de l'espace de modules marqué \mathfrak{M}_Λ si et seulement si $\phi'^{-1} \circ \phi \in \text{Mon}(X)$. Donc il existe $[O(\Lambda, h) : \text{Mon}(X, h)]$ composantes de \mathfrak{M}_Λ contenant une (X, ϕ) avec $\phi(H) = h$. On note leur réunion $\mathfrak{M}_\Lambda^{(X, H)}$.

Maintenant, des variétés hyperkähleriennes polarisées (X, H) et (X', H') sont dans la même composante de \mathfrak{M}_τ si et seulement s'il existe des marquages ϕ et ϕ' tels que $\phi(H) = \phi'(H') = h$, et (X, ϕ) et (X', ϕ') sont dans la même composante de \mathfrak{M}_Λ . On voit alors que $\mathfrak{M}_\Lambda^{(X, H)}$ et $\mathfrak{M}_\Lambda^{(X', H')}$ sont soit identiques, soit disjointes. Par conséquent, le nombre de composantes connexes de \mathfrak{M}_τ est

$$[O(\Lambda) : \text{Mon}(X)] / [O(\Lambda, h) : \text{Mon}(X, h)].$$

En utilisant

$$[O(\Lambda, h) : \text{Mon}(X, h)] = [O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X) : \text{Mon}(X)],$$

on voit que ce nombre est égal à l'indice de $O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X)$ dans $O(\Lambda)$. \square

Remarque 4.6. On a vu $\text{Mon}(X) \subset O^+(\Lambda)$. De plus, il existe toujours un élément de norme spinorielle -1 dans $O(\Lambda, h)$: il suffit de prendre un $v \in h^\perp$ de carré 2 et considérer la réflexion R_v . L'indice $[O(\Lambda) : O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X)]$ peut donc aussi s'exprimer comme $[O^+(\Lambda) : O^+(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X)]$.

4.2.1 Surface K3

Dans le cas d'une surface K3, le réseau Λ_{K3} étant pair et unimodulaire, le type de polarisation τ est uniquement déterminé par son carré $2n$ (critère d'Eichler).

Proposition 4.7. *Soient $n \geq 1$ un entier et τ un type de polarisation de surface K3 de carré $2n$. L'espace de modules $\mathfrak{M}_{2n} := \mathfrak{M}_\tau$ est connexe.*

Démonstration. On a calculé $\text{Mon}(S) = O^+(\Lambda_{K3})$. Par la remarque 4.6, on a immédiatement que l'espace de modules est connexe. \square

Montrons que \mathfrak{M}_{2n} est le complémentaire dans \mathcal{P}_{2n} d'au plus deux diviseurs de Heegner.

Proposition 4.8. *Le complémentaire de \mathfrak{M}_{2n} dans \mathcal{P}_{2n} est un seul diviseur de Heegner si $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ et la réunion de deux diviseurs de Heegner si $n \equiv 1 \pmod{4}$.*

Démonstration. Par définition, l'espace de modules \mathcal{P}_{2n} est le quotient de \mathcal{D}_{2n}^+ par $\text{Mon}(S, h) = O^+(\Lambda_{K3}, h)$. En fait, $O(\Lambda_{K3}, h)$ agit transitivement sur les deux composantes connexes de \mathcal{D}_{2n} et $O^+(\Lambda_{K3}, h)$ est le sous-groupe qui fixe les composantes. Donc \mathcal{P}_{2n} est aussi le quotient de \mathcal{D}_{2n} par $O(\Lambda_{K3}, h)$.

Pour déterminer les diviseurs de Heegner \mathcal{H}_δ dans le complémentaire de \mathfrak{M}_{2n} , il suffit, d'après la proposition 4.3, de trouver les classes $\delta \in h^\perp$ de carré -2 modulo l'action de $O(\Lambda_{K3}, h)$. Le sous-réseau h^\perp est isomorphe à $U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \langle l \rangle$ avec $l^2 = -2n$, et son groupe discriminant est $D(h^\perp) \cong \mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$. Le groupe $O(\Lambda_{K3}, h)$ restreint à h^\perp est $\tilde{O}(h^\perp)$. Donc par le critère d'Eichler, chaque \mathcal{H}_δ est déterminé par le carré de δ , qui est -2 , et la divisibilité γ , qui est 1 ou 2. Le cas $\gamma = 1$ est toujours présent : on peut prendre $e_1 - e_2$ pour une copie de $U = \langle e_1, e_2 \rangle$. Le cas $\gamma = 2$ a lieu si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{4}$: on écrit $\delta = 2x + bl$ pour un $x \in U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$, alors $b^2 \cdot n = 2x^2 + 1$ et on a $n \equiv 1 \pmod{4}$; lorsque $n = 4k + 1$ on peut poser $\delta = 2(e_1 - ke_2) + l$. \square

Mukai a trouvé des constructions géométriques pour des polarisations de bas degré dans une longue série d'articles : on connaît la description d'une surface K3 polarisée de degré $2n$ générale pour tout $n \leq 11$.

4.2.2 Type $K3^{[m]}$

Dans le cas de type $K3^{[m]}$, notons $\Lambda = \Lambda_{K3^{[m]}}$ et fixons un $h \in \tau$.

Proposition 4.9. *On a $O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X) = O(\Lambda, h) \cdot \widehat{O}(\Lambda)$.*

Démonstration. Comme $\text{Mon}(X) = \widehat{O}^+(\Lambda)$ est contenu dans $\widehat{O}(\Lambda)$, il suffit de montrer que

$$\widehat{O}(\Lambda) \subset O(\Lambda, h) \cdot \widehat{O}^+(\Lambda).$$

On prend un élément $v \in h^\perp \cap \delta^\perp$ de carré 2 et on considère la réflexion R_v . Clairement, on a $R_v \in O(\Lambda, h)$ et $\sigma(R_v) = -1$. De plus, comme $D(\Lambda)$ est engendré par δ_* , on a $\chi(R_v) = \text{Id}$. Donc $R_v \in \tilde{O}(\Lambda, h) := \tilde{O}(\Lambda) \cap O(\Lambda, h)$. Maintenant pour $f \in \widehat{O}(\Lambda)$, soit $\sigma(f) = 1$, c'est-à-dire on a déjà $f \in \widehat{O}^+(\Lambda)$; soit $\sigma(f) = -1$, alors écrivons $f = f \circ R_v^{-1} \circ R_v$ et on a $f \circ R_v^{-1} \in \widehat{O}^+(\Lambda)$ et $R_v \in O(\Lambda, h)$. \square

Le nombre de composantes de \mathfrak{M}_τ est donc égal au nombre de $\widehat{O}(\Lambda)$ -orbites dans τ . Comme Λ satisfait les conditions de la proposition 1.8, on peut d'abord calculer le nombre de $\widetilde{O}(\Lambda)$ -orbites pour un type τ . Comme $\widehat{O}(\Lambda)$ est engendré par $\widetilde{O}(\Lambda)$ et $\{\pm \text{Id}\}$, le nombre de $\widehat{O}(\Lambda)$ -orbites est égal au nombre de $\widetilde{O}(\Lambda)$ -orbites si h et $-h$ sont dans la même $\widetilde{O}(\Lambda)$ -orbite, c'est-à-dire si γ est 1 ou 2; sinon c'est le nombre de $\widetilde{O}(\Lambda)$ -orbites divisé par 2. On a donc démontré la proposition suivante.

Proposition 4.10. *Soit τ un type de polarisation de divisibilité γ , c'est-à-dire une $O(\Lambda)$ -orbite. Alors le nombre de $\widehat{O}(\Lambda)$ -orbites dans τ est $2^{\widetilde{f}(\gamma)}$. Le nombre de composantes de \mathfrak{M}_τ est $2^{\max(\widetilde{p}(\gamma)-1,0)}$.*

Remarque 4.11. Pour $\gamma \leq 11$, on a $2^{\max(\widetilde{p}(\gamma)-1,0)} = 1$. La divisibilité minimale pour que \mathfrak{M}_τ soit non irréductible est donc $\gamma = 12$.

Regardons maintenant le résultat d'Apostolov et Gritsenko–Hulek–Sankaran. Comme Λ n'est pas unimodulaire, un type de polarisation τ n'est pas uniquement déterminé par son carré et sa divisibilité. Le calcul d'Apostolov et Gritsenko–Hulek–Sankaran est fait en regroupant les types de polarisation de même carré et divisibilité. En joignant son calcul au nôtre, on a le résultat complet suivant.

Théorème 4.12. *Soient m, d et γ des entiers positifs avec $m \geq 2$ et $\gamma \mid \text{pgcd}(2m - 2, 2d)$. Pour un diviseur premier p de γ , on note $\alpha := \min(v_p(m - 1), v_p(d))$ et $\beta := v_p(\gamma)$. Alors il existe un type de polarisation τ de carré $2d$ et de divisibilité γ si et seulement si tout diviseur premier p de γ satisfait les conditions suivantes*

- si $v_p(m - 1) \neq v_p(d)$, on a $\beta \leq \alpha/2$;
- si par contre $v_p(m - 1) = v_p(d) = \alpha$, alors soit $\beta \leq \alpha/2$, soit $\beta > \alpha/2$, avec $-d/(m - 1)$ un carré modulo $p^{2\beta-\alpha}$.

Le nombre total de tels τ est $\prod_{p|\gamma} N_p$ avec, pour $p \geq 3$,

$$N_p := \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(p^\beta) & \text{si } \beta \leq \alpha/2 \\ p^{\alpha-\beta} & \text{si } \beta > \alpha/2 \end{cases}$$

et, pour $p = 2$,

$$N_2 := \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 1 \\ 2^{\beta-2} & \text{si } \beta \geq 2, \beta \leq \alpha/2 + 1 \\ 2^{\alpha+1-\beta} & \text{si } \beta > \alpha/2 + 1 \end{cases}$$

où $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler qui est paire lorsque $n \geq 3$. Pour chaque τ , l'espace \mathfrak{M}_τ a $2^{\max(\tilde{\rho}(\gamma)-1,0)}$ composantes connexes.

- Remarque 4.13.* 1. Notre expression est bien sûr équivalente à celle de [GHS, Proposition 3.6]. Un avantage est que l'on peut voir le comportement de ce nombre par rapport à chaque diviseur premier de γ .
2. Le type τ est uniquement déterminé par d et γ si et seulement si, pour tout diviseur premier p de γ , on a $N_p = 1$. En particulier, c'est vrai si $\gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou si $\text{pgcd}\left(\frac{2m-2}{\gamma}, \frac{2d}{\gamma}, \gamma\right) = 1$. De plus, il se peut que \mathfrak{M}_τ soit irréductible sans que τ soit uniquement déterminé par d et γ . Par exemple si $m-1 = d = p^2$ et $\gamma = p$ pour un nombre premier $p \geq 5$, il existe $\frac{p-1}{2}$ types différents de carré $2d$ et de divisibilité γ , mais chacun a un espace de modules irréductible.

Démonstration. Soit h un élément primitif de divisibilité γ dans Λ . Si $\gamma = 1$, comme Λ_{K3} est un sous-réseau de Λ , il existe un type de carré $2d$ pour tout $d > 0$. On regarde donc le cas $\gamma \geq 2$. On peut supposer que

$$h = \gamma ax + b\delta,$$

où $x \in \Lambda_{K3}$ est primitif et de carré $x^2 = 2c$, avec des entiers $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tels que $\text{pgcd}(\gamma a, 2m-2) = \gamma$ et $\text{pgcd}(\gamma a, b) = 1$. Si h est de plus de carré $2d$, on a

$$2d = h^2 = 2ca^2\gamma^2 - b^2(2m-2).$$

Pour qu'un tel h existe, il faut et il suffit qu'il existe un entier b tel que

$$\gamma^2 \mid b^2(m-1) + d.$$

Pour tout p diviseur premier de γ , comme $\text{pgcd}(\gamma, b) = 1$, b n'est pas divisible par p . Donc si $v_p(m-1) \neq v_p(d)$, alors $v_p(b^2(m-1) + d) = \min(v_p(m-1), v_p(d))$ et on obtient la première condition ; si $v_p(m-1) = v_p(d) = \alpha$, pour que $p^{2\beta} \mid b^2(m-1) + d$, on obtient bien la deuxième condition.

Pour compter le nombre de tels τ , on compte d'abord le nombre de $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites, ou encore, par le critère d'Eichler, le nombre de classes $h_* = \frac{b(2m-2)}{\gamma} \delta_*$. Comme le groupe discriminant $D(\Lambda)$ est $\langle \delta_* \rangle \cong \mathbf{Z}/(2m-2)\mathbf{Z}$,

c'est aussi le nombre de classes b modulo γ . Donc on peut noter ce nombre $\prod_{p|\gamma} M_p$, où M_p est le nombre de classes de b modulo p^β .

Lorsque $p \geq 3$, si $\beta \leq \alpha/2$, alors il suffit que $\text{pgcd}(b, p) = 1$, donc $M_p = \varphi(p^\beta)$; si $\beta > \alpha/2$, alors l'équation $b^2 \equiv -d/(m-1) \pmod{p^{2\beta-\alpha}}$ a deux solutions, donc $M_p = 2p^{\alpha-\beta}$.

Supposons $p = 2$. On voit d'abord que b doit être impair. Lorsque $\beta \leq \alpha/2 + 1$, c'est aussi suffisant : si $\beta \leq \alpha/2$, il est clair que $b^2(m-1) + d$ est un multiple de $2^\alpha = 2^{2\beta}$; si $\beta = \alpha/2 + 1/2$, alors $v_p(m-1) = v_p(d) = \alpha$, et $b^2(m-1) + d$ est un multiple de $2^{\alpha+1} = 2^{2\beta}$; si $\beta = \alpha/2 + 1$, alors $v_p(m-1) = v_p(d) = \alpha$ et $-d/(m-1) \equiv 1 \pmod{4}$, et $b^2(m-1) + d$ est un multiple de $2^{\alpha+2} = 2^{2\beta}$. Donc lorsque $\beta \leq \alpha/2 + 1$ et τ existe, on a $M_2 = 2^{\beta-1}$. Pour $\beta > \alpha/2 + 1$, l'équation $b^2 \equiv 1 \pmod{2^{2\beta-\alpha}}$ a 2 solutions modulo $2^{2\beta-\alpha-1}$, donc on a $M_2 = 2 \times 2^{\alpha+1-\beta}$.

On sait que chaque τ contient $2^{\tilde{\rho}(\gamma)}$ $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites. Donc le nombre de τ est $\prod_{p|\gamma} M_p$ divisé par $2^{\tilde{\rho}(\gamma)}$. On peut poser $N_p = M_p/2$ pour $p \geq 3$, $M_2 = N_2/2$ si $v_2(\gamma) \geq 2$ et $M_2 = N_2 = 1$ si $v_2(\gamma) = 1$. On peut conclure. \square

Soit Λ_{24} le réseau de Mukai. Comme Λ_{24} est pair et unimodulaire, la $O(\Lambda_{24})$ -classe d'un élément $v \in \Lambda_{24}$ primitif de carré $2m - 2$ est unique. Pour un tel v , son complémentaire v^\perp est isomorphe à Λ .

Fixons un type de polarisation τ et soit \mathfrak{M}_τ l'espace de modules polarisé de type τ . Apostolov a remarqué le phénomène suivant.

Proposition 4.14. *L'ensemble des composantes de \mathfrak{M}_τ est en bijection avec l'ensemble des $O(\Lambda_{24})$ -orbites de sous-réseaux de rang 2 dans Λ_{24} de la forme $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$, tels que $v^2 = 2m - 2$ et $h \in v^\perp \cong \Lambda$ est de classe τ . De plus, l'indice d'un tel sous-réseau dans son saturé est $\text{div}(\tau)$.*

Démonstration. Comme la $O(\Lambda_{24})$ -classe d'un v primitif de carré $2m - 2$ est unique, on peut fixer un tel $v \in \Lambda_{24}$ et identifier Λ avec v^\perp . Il suffit maintenant de considérer les $O(\Lambda_{24}, v)$ -orbites de sous-réseaux de rang 1 de la forme $\langle h \rangle$ dans Λ . Comme on a $O(\Lambda_{24}, v)|_\Lambda = \tilde{O}(\Lambda)$ (proposition 1.5), ce sont aussi les $\hat{O}(\Lambda)$ -classes des éléments h de classe τ dans Λ . On a donc une bijection.

Maintenant soit $\text{div}(\tau) = \gamma$. Comme Λ_{24} est pair et unimodulaire, on peut écrire $v = e_1 + (m-1)e_2$ et $\delta = e_1 - (m-1)e_2$ avec $\Lambda_{24} = \Lambda_{K3} \oplus \langle e_1, e_2 \rangle$. Alors $h = \gamma ax + b\delta$ avec $x \in \Lambda_{K3}$ primitif, $\text{pgcd}(\gamma a, 2m-2) = \gamma$ et $\text{pgcd}(\gamma a, b) = 1$. On considère la classe $u := \frac{h-bv}{\gamma} = ax - \frac{2m-2}{\gamma}be_2$ qui est

entière. De plus $\langle u, v \rangle$ est un réseau saturé dans Λ_{24} : si w est un élément primitif dans $\langle u, v \rangle$ qu'on écrit

$$w = cu + dv = cax + de_1 + \left(d(m-1) - \frac{2m-2}{\gamma}bc \right) e_2,$$

avec $\text{pgcd}(c, d) = 1$, et que w/e reste entier dans Λ_{24} pour un entier $e > 0$, alors e est un diviseur de

$$\text{pgcd}\left(ca, d, \frac{2m-2}{\gamma}bc\right) = 1,$$

donc $e = 1$. L'indice de $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ dans $\langle u, v \rangle$ est clairement γ . □

4.2.3 Type Kummer

Notons $\Lambda = \Lambda_{K_m}$ et fixons $h \in \tau$. On peut faire des calculs analogues.

Proposition 4.15. *On a $O(\Lambda, h) \cdot \text{Mon}(X) = O(\Lambda, h) \cdot \widehat{O}(\Lambda)$.*

Démonstration. On a montré que $\text{Mon}(X) = \mathcal{N}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\widehat{O}^+(\Lambda)$. Par le même argument que dans la démonstration de la proposition 4.9, on peut obtenir

$$O(\Lambda, h) \cdot \widehat{O}^+(\Lambda) = O(\Lambda, h) \cdot \widehat{O}(\Lambda).$$

Il suffit donc de montrer

$$\widehat{O}^+(\Lambda) \subset O(\Lambda, h) \cdot \mathcal{N}.$$

On prend cette fois-ci un élément $v \in h^\perp \cap \delta^\perp$ de carré -2 et considère la réflexion R_v . On a $R_v \in O(\Lambda, h)$, $\sigma(R_v) = 1$ et $\det(R_v) = -1$. De plus, comme $D(\Lambda)$ est engendré par δ_* , on a $\chi(R_v) = \text{Id}$. Donc $R_v \in \widehat{O}^+(\Lambda, h) := \widehat{O}^+(\Lambda) \cap O(\Lambda, h)$. Maintenant pour $f \in \widehat{O}^+(\Lambda)$, soit on a $\det \cdot \chi(f) = 1$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{N}$ déjà ; soit $\det \cdot \chi(f) = -1$, alors écrivons $f = f \circ R_v^{-1} \circ R_v$ et on a $f \circ R_v^{-1} \in \mathcal{N}$ et $R_v \in O(\Lambda, h)$. □

De nouveau, le nombre de composantes de \mathfrak{M}_τ est égal au nombre de $\widehat{O}(\Lambda)$ -orbites. Les conditions de la proposition 1.8 étant toujours vérifiées, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.16. Soit τ un type de polarisation de divisibilité γ , c'est-à-dire une $O(\Lambda)$ -orbite. Alors le nombre de $\tilde{O}(\Lambda)$ -orbites dans τ est $2^{\tilde{\rho}(\gamma)}$. Le nombre de composantes dans \mathfrak{M}_τ est $2^{\max(\tilde{\rho}(\gamma)-1,0)}$.

On peut maintenant refaire l'argument du théorème 4.12 presque mot à mot, en remplaçant $m - 1$ par $m + 1$ et obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.17. Soient d et γ des entiers positifs. Pour tout diviseur premier p de γ , on note $\alpha := \min(v_p(m + 1), v_p(d))$ et $\beta := v_p(\gamma)$. Alors il existe un type de polarisation τ de carré $2d$ et de divisibilité γ si et seulement si tout diviseur premier p de γ satisfait les conditions suivantes

- si $v_p(m + 1) \neq v_p(d)$, on a $\beta \leq \alpha/2$;
- si par contre $v_p(m + 1) = v_p(d) = \alpha$, alors soit $\beta \leq \alpha/2$, soit $\beta > \alpha/2$, avec $-d/(m + 1)$ un carré modulo $p^{2\beta-\alpha}$.

Le nombre total de tels τ est $\prod_{p|\gamma} N_p$, avec pour $p \geq 3$

$$N_p := \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(p^\beta) & \beta \leq \alpha/2 \\ p^{\alpha-\beta} & \beta > \alpha/2 \end{cases}$$

et pour $p = 2$

$$N_2 := \begin{cases} 1 & \beta = 1 \\ 2^{\beta-2} & \beta \geq 2, \beta \leq \alpha/2 + 1 \\ 2^{\alpha+1-\beta} & \beta > \alpha/2 + 1 \end{cases}$$

Pour chaque τ , l'espace \mathfrak{M}_τ a $2^{\max(\tilde{\rho}(\gamma)-1,0)}$ composantes connexes.

Maintenant $\Lambda = \Lambda_{K_m}$ est un sous-réseau du réseau $\Lambda_8 = U^{\oplus 4}$ qui est pair et unimodulaire. Plus précisément, pour $v \in \Lambda_8$ de carré $2m + 2$, on a $v^\perp \cong \Lambda$. On a de nouveau une bijection entre les composantes de \mathfrak{M}_τ et les $O(\Lambda_8)$ -orbites de sous-réseaux de rang 2 de la forme $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ dans Λ_8 tels que $v^2 = 2m + 2$ et $h \in v^\perp \cong \Lambda$ est de classe τ .

4.3 Dualité étrange

On regarde d'abord le cas de type $K3^{[m]}$. Soit Λ_{24} le réseau de Mukai. Un sous-réseau $T = \langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ de rang 2 de Λ_{24} peut apparaître de deux manières différentes : si par exemple $h^2 = 2n$ et $v^2 = 2m - 2$, on obtient un type de polarisation τ_1 de carré $2n$ sur les variétés hyperkählériennes

de type $K3^{[m]}$ et un autre τ_2 de carré $2m - 2$ sur les variétés hyperkähleriennes de type $K3^{[n+1]}$. On montre maintenant qu'il existe en fait un isomorphisme entre les deux domaines des périodes.

Proposition 4.18. *Soient $m \geq 2$ et $n \geq 1$ des entiers. Soient τ_1 et τ_2 des types de polarisation définis comme ci-dessus par un sous-réseau $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ de Λ_{24} , où $h^2 = 2n$ et $v^2 = 2m - 2$. Il existe un isomorphisme*

$${}^m\mathcal{P}_{\tau_1} \cong {}^{n+1}\mathcal{P}_{\tau_2}.$$

Démonstration. Soient (X, H) et (Y, V) des variétés hyperkähleriennes polarisées de types respectifs τ_1 et τ_2 . On a $h \in \tau_1$ vu comme élément dans v^\perp , et $v \in \tau_2$ vu comme élément dans h^\perp . Par définition, le domaine des périodes \mathcal{P}_{τ_1} est le quotient de \mathcal{D}_h^+ par $\text{Mon}(X, h) = \widehat{O}^+(v^\perp, h)$. En fait, $\widehat{O}(v^\perp, h)$ agit transitivement sur les deux composantes connexes de \mathcal{D}_h et $\widehat{O}^+(v^\perp, h)$ est le sous-groupe qui fixe les composantes. Donc on peut aussi considérer \mathcal{P}_{τ_1} comme le quotient de \mathcal{D}_h par $\widehat{O}(v^\perp, h)$. De même, on considère \mathcal{P}_{τ_2} comme le quotient de \mathcal{D}_v par $\widehat{O}(h^\perp, v)$. On peut identifier \mathcal{D}_h et \mathcal{D}_v avec

$$\mathcal{D}_{h,v} := \left\{ x \in \mathbf{P}(\Lambda_{24} \otimes \mathbf{C}) \mid x \cdot h = x \cdot v = x^2 = 0, x \cdot \bar{x} > 0 \right\}.$$

Il suffit donc de vérifier que les actions de groupe coïncident. Soit φ un élément de $\widehat{O}(v^\perp, h)$. On peut prendre $e \in \{\pm 1\}$ tel que $e\varphi \in \widetilde{O}(v^\perp)$. Comme on a $O(\Lambda_{24}, v)|_{v^\perp} = \widetilde{O}(v^\perp)$, il existe $\Phi \in O(\Lambda_{24}, v)$ tel que $e\varphi = \Phi|_{v^\perp}$. Considérons

$$O(\Lambda_{24}, h, v) := \{ \Phi \in O(\Lambda_{24}) \mid \Phi(h) = \pm h, \Phi(v) = \pm v \}.$$

On a alors

$$\mathcal{D}_h / \widehat{O}(v^\perp, h) \cong \mathcal{D}_{h,v} / O(\Lambda_{24}, h, v).$$

Comme $O(\Lambda_{24}, h, v)$ est symétrique par rapport à h et v , on a aussi un isomorphisme pour $\mathcal{D}_v / \widehat{O}(h^\perp, v)$. On en conclut que $\mathcal{P}_{\tau_1} \cong \mathcal{P}_{\tau_2}$. \square

Cet isomorphisme induit un morphisme birationnel entre les espaces de modules ${}^m\mathfrak{M}_{\tau_1}$ et ${}^{n+1}\mathfrak{M}_{\tau_2}$. On l'appelle la *dualité étrange*.

On peut faire cette même construction pour les variétés hyperkähleriennes de type Kummer. Soit $T = \langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ un sous-réseau de rang 2 de

Λ_8 avec $h^2 = 2n$ et $v^2 = 2m + 2$. On obtient un type de polarisation τ_1 de carré $2n$ sur les variétés hyperkählérienne de type K_m et un autre τ_2 de carré $2m + 2$ sur les variété hyperkählérienne de type K_{n-1} .

Proposition 4.19. *Soient $m \geq 2$ et $n \geq 3$ des entiers. Soient τ_1 et τ_2 des types de polarisation définis par un sous-réseau $\langle h \rangle \oplus \langle v \rangle$ de Λ_8 , où $h^2 = 2n$ et $v^2 = 2m + 2$. Il existe un isomorphisme*

$${}^m\mathcal{P}_{\tau_1} \cong {}^{n-1}\mathcal{P}_{\tau_2}.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 4.18, on identifie \mathcal{D}_h et \mathcal{D}_v avec

$$\mathcal{D}_{h,v} := \left\{ x \in \mathbf{P}(\Lambda_8 \otimes \mathbf{C}) \mid x \cdot h = x \cdot v = x^2 = 0, x \cdot \bar{x} > 0 \right\}.$$

Le groupe de monodromie polarisé pour h est

$$\text{Mon}(X, h) = \mathcal{N} \cap O(X, h) = \left\{ \varphi \in \widehat{O}^+(v^\perp, h) \mid (\det \cdot \chi)(\varphi) = 1 \right\}.$$

Le groupe que l'on considère qui agit sur \mathcal{D}_h est donc

$$\left\{ \varphi \in \widehat{O}(v^\perp, h) \mid (\det \cdot \chi)(\varphi) = 1 \right\}.$$

Pour un élément φ , il existe $e \in \{\pm 1\}$ tel que $e\varphi \in \widetilde{O}(v^\perp)$, avec $\det(e\varphi) = 1$. Comme on a $O(\Lambda_8, v)|_{v^\perp} = \widetilde{O}(v^\perp)$, il existe $\Phi \in O(\Lambda_8, v)$ tel que $e\varphi = \Phi|_{v^\perp}$. Donc on a $\det(\Phi) = 1$. Posons

$$SO(\Lambda_8, h, v) := \{ \Phi \in O(\Lambda_8) \mid \det(\Phi) = 1, \Phi(h) = \pm h, \Phi(v) = \pm v \}.$$

On a alors

$$\mathcal{D}_h / \left\{ \varphi \in \widehat{O}(v^\perp, h) \mid (\det \cdot \chi)(\varphi) = 1 \right\} \cong \mathcal{D}_{h,v} / SO(\Lambda_8, h, v).$$

Par symétrie, on en conclut que $\mathcal{P}_{\tau_1} \cong \mathcal{P}_{\tau_2}$. □

4.4 Exemples

4.4.1 Type $K3^{[2]}$ polarisé

On étudie le cas de type $K3^{[2]}$ polarisé suivant la méthode de [DM]. On sait que l'espace de modules polarisé est irréductible si on fixe le type de

polarisation (ou même si on fixe seulement le carré et la divisibilité). On veut déterminer l'image de l'application des périodes, ou encore, les diviseurs de Heegner contenus dans le complémentaire de l'image. Fixons donc un type de polarisation τ de carré $2n$ et de divisibilité $\gamma \in \{1, 2\}$, un élément $h \in \tau$, et un plongement de $\Lambda \cong v^\perp$ dans Λ_{24} avec $v^2 = 2$. Notons T le sous-réseau $\langle v \rangle \oplus \langle h \rangle$ et \bar{T} sa saturation. Dans ce cas, le domaine des périodes \mathcal{P}_τ est le quotient de \mathcal{D}_h par $\widehat{O}(v^\perp, h)$. Par le théorème 3.15, pour un élément $a \in \Lambda \cong v^\perp$, l'hyperplan a^\perp est un mur si et seulement si $a^2 = -2$ ou $a^2 = -10$ avec $\text{div}(a) = 2$. On cherche maintenant toutes ces classes a dans h^\perp modulo $\widehat{O}(v^\perp, h)$. Le groupe restreint $\widehat{O}(v^\perp, h)|_{T^\perp}$ contient $\widetilde{O}(T^\perp)$. Par le critère d'Eichler, il suffit de déterminer les carrés et classes de a_* (dans $D(T^\perp)$) possibles. Comme $\text{div}_{T^\perp}(a)$ est divisible par $\text{div}_{v^\perp}(a)$, on a d'abord 4 possibilités pour le carré a^2 et la divisibilité $\text{div}_{T^\perp}(a)$: $(-2, 1)$, $(-2, 2)$, $(-10, 2)$ et $(-10, 10)$.

- Si $\gamma = \text{div}(h) = 2$, le groupe discriminant $D(T^\perp)$ est $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On peut supposer que $h = 2x - \lambda\delta$, où λ est impair. On a $2n = 4x^2 - 2\lambda^2$, donc $n \equiv -1 \pmod{4}$. Le degré (voir la remarque 4.4) du diviseur \mathcal{H}_a est

$$d = \left| \frac{a^2 n}{\text{div}_{T^\perp}(a)^2} \right|.$$

Pour que d soit un entier, la seule possibilité est donc $(-2, 1)$. D'ailleurs on peut vérifier que le cas $(-2, 1)$ est toujours présent. La divisibilité dans T^\perp étant 1, la classe a_* est nulle, donc unique. On conclut que l'image de l'application des périodes est le complémentaire d'un seul diviseur de Heegner \mathcal{H}_a (qui est en fait égal à \mathcal{H}_{2n} dans ce cas).

- Si $\gamma = \text{div}(h) = 1$, le groupe discriminant $D(T^\perp)$ est un produit $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$. Le degré du diviseur \mathcal{H}_a est

$$d = \left| \frac{4a^2 n}{\text{div}_{T^\perp}(a)^2} \right|.$$

Les trois premiers cas sont toujours présents. Pour le cas $(-10, 10)$, il faut que n soit de la forme $5^{2\alpha+1}n'$ avec $n' \equiv \pm 1 \pmod{5}$. Donc l'image est le complémentaire d'une réunion de diviseurs de Heegner contenus dans \mathcal{H}_{8n} , \mathcal{H}_{2n} , \mathcal{H}_{10n} ou $\mathcal{H}_{2n/5}$. De plus on peut déterminer les nombres de diviseurs irréductibles de chaque degré :

un seul de degré $8n$; deux de degré $2n$ si $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ et un seul si $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$; un seul de degré $10n$.

4.4.2 Type $K3^{[2]}$ polarisé de carré 6 et de divisibilité 2

On étudie maintenant un exemple de la dualité étrange. Plus précisément on regarde le sous-réseau dans Λ_{24} de la forme $\langle v \rangle \oplus \langle h \rangle$ d'indice 2 dans sa saturation, avec $v^2 = 2$ et $h^2 = 6$. On a un isomorphisme

$$\sigma: {}^2\mathcal{P}_6^{(2)} \xrightarrow{\sim} {}^4\mathcal{P}_2^{(2)}$$

entre les domaines de périodes. Leurs constructions géométriques respectives ont été trouvées par Beauville, Donagi [BD] et Lehn, Lehn, Sorger, van Straten [LLSvS]. Par l'analyse précédente, l'espace de modules ${}^2\mathfrak{M}_6^{(2)}$ est le complémentaire d'un seul diviseur de Heegner \mathcal{H}_6 dans le domaine des périodes.

Expliquons la construction de Beauville–Donagi. Soit W une cubique lisse dans \mathbf{P}^5 . La variété de Fano $X = F(W) \subset G(2, 6)$ des droites contenues dans W est une variété hyperkählérienne de type $K3^{[2]}$. Le plongement de Plücker de la grassmannienne donne une polarisation sur X de carré 6 et de divisibilité 2. De plus, une variété hyperkählérienne polarisée (X, H) générale de ce type peut être ainsi obtenue. Notons $\mathfrak{M}_{\text{cubique}}$ l'espace de modules des hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbf{P}^5 , qui est une variété affine de dimension 19. La construction de Beauville–Donagi donne alors des plongements ouverts

$$(3) \quad \mathfrak{M}_{\text{cubique}} \hookrightarrow {}^2\mathfrak{M}_6^{(2)} \hookrightarrow {}^2\mathcal{P}_6^{(2)}.$$

Pour les hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbf{P}^5 , il existe aussi une application des périodes

$$\wp_{\text{cubique}}: \mathfrak{M}_{\text{cubique}} \longrightarrow \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} {}^2\mathcal{P}_6^{(2)}$ est une variété quasi-projective. Beauville et Donagi ont montré que via cette identification, c'est le plongement ouvert (3). On peut donc voir les deux espaces de modules comme des ouverts dans \mathcal{P} . Laza a démontré dans [L] que le complémentaire de $\mathfrak{M}_{\text{cubique}}$ est la réunion de deux diviseurs $\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_6$. Van den Dries [vD] a étudié les « préimages » de \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_6 dans la compactification GIT de $\mathfrak{M}_{\text{cubique}}$: la « préimage » de

\mathcal{H}_2 est réduite à un seul point, qui correspond à la *cubique pfaffienne* ; la « préimage » de \mathcal{H}_6 paramètre les cubiques ayant un point double. On voit aussi que \mathcal{H}_2 correspond au diviseur de ${}^2\mathfrak{M}_6^{(2)}$ qui paramètre les variétés hyperkähleriennes polarisées $(S^{[2]}, 2L_2 - \delta)$ pour (S, L) une surface K3 polarisée de degré 2. Comme $2L_2 - \delta$ a des points base, donc n'est pas très ample, ces variétés ne sont les variétés de Fano d'aucune cubique dans \mathbf{P}^5 .

De l'autre côté, Lehn, Lehn, Sorger et van Straten ont construit une variété hyperkählienne $Y(W)$ de type ${}^4\mathfrak{M}_2^{(2)}$ pour toute cubique W dans \mathbf{P}^5 ne contenant aucun plan. C'est une contraction de l'espace de modules $\mathcal{M}_3(W)$ des cubiques tordues sur W , avec un plongement $j: W \hookrightarrow Y(W)$ comme sous-variété lagrangienne ([LLSvS, Theorem B]). Par le résultat de Hassett [H], les cubiques ne contenant pas de plan sont exactement celles dans $\mathfrak{M}_{\text{cubique}} \setminus \mathcal{H}_8$. Il est vérifié dans [LPZ, Proposition 1.3] que les applications des périodes ${}^2\wp_6^{(2)}$ et ${}^4\wp_2^{(2)}$ sont compatibles avec l'isomorphisme $\sigma: {}^2\mathcal{P}_6^{(2)} \xrightarrow{\sim} {}^4\mathcal{P}_2^{(2)}$. On peut donc aussi identifier ${}^4\mathcal{P}_2^{(2)}$ à \mathcal{P} et obtenir une injection de $\mathfrak{M}_{\text{cubique}} \setminus \mathcal{H}_8$ dans ${}^4\mathfrak{M}_2^{(2)} \subset \mathcal{P}$. On déduit de ce qui précède que le complémentaire de ${}^4\mathfrak{M}_2^{(2)}$ dans \mathcal{P} est contenu dans la réunion $\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_6 \cup \mathcal{H}_8$, qui sont tous les trois des diviseurs irréductibles. C'est en fait une égalité : vérifions à la main que le complémentaire de ${}^4\mathfrak{M}_2^{(2)}$ dans ${}^4\mathcal{P}_2^{(2)}$ est la réunion $\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_6 \cup \mathcal{H}_8$. On peut supposer que $v = e_1 + 3e_2$ et $h = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2) + (e_1 - 3e_2)$, où (e_1, e_2) et (ϵ_1, ϵ_2) sont des bases pour des copies de U . Alors

$$T^\perp = (\langle v \rangle \oplus \langle h \rangle)^\perp = \langle \epsilon_1 - \epsilon_2, e_1 - 3e_2 + 3\epsilon_1 \rangle \oplus U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}.$$

On a $D(T^\perp) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, engendré par $(e_1 - 3e_2 + 3\epsilon_1)_*$. Soit a une classe contenue dans h^\perp telle que a^\perp soit un mur. Par le théorème 3.15, il existe w dans le saturé du réseau engendré par a et v satisfaisant certaines conditions numériques. En particulier $0 \leq w \cdot v \leq 3$. On voit que a est un multiple de $w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v}v$. Donc on est dans l'un des cas suivants.

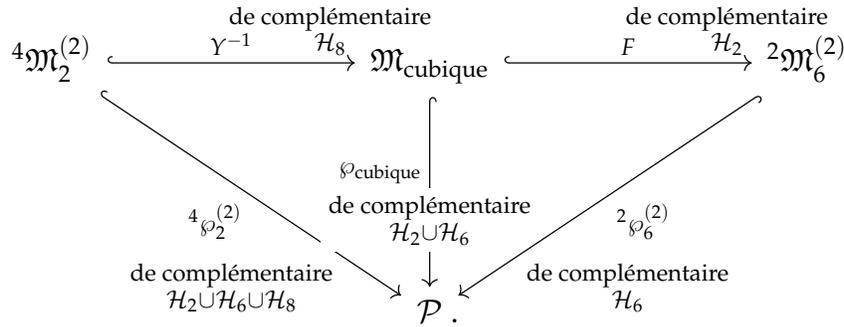
1. Si $w \cdot v = 0$, alors $a = \pm w$. Comme $a^2 < 0$, on a $w^2 = -2$ et $(a^2, \text{div}_{T^\perp}(a)) = (-2, 1)$.
2. Si $w \cdot v = 1$, alors $a = \pm(6w - v)$. Donc $\text{div}_{v^\perp}(a)$ est 6, et $\text{div}_{T^\perp}(a)$ est un multiple de 6, qui est impossible puisque $D(T^\perp) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
3. Si $w \cdot v = 2$, alors $a = \pm(3w - v)$. Comme $a^2 < 0$, on a $w^2 = -2$ ou $w^2 = 0$ et $(a^2, \text{div}_{T^\perp}(a)) = (-24, 3)$ ou $(-6, 3)$.

4. Si $w \cdot v = 3$, alors $a = \pm(2w - v)$. Donc $\text{div}_{v^\perp}(a)$ est 2, et $\text{div}_{T^\perp}(a)$ est un multiple de 2, qui est impossible.

Donc on a 3 possibilités pour la paire $(a^2, \text{div}_{T^\perp}(a))$: $(-2, 1)$, $(-6, 3)$ et $(-24, 3)$. En particulier, les trois possibilités sont toutes présentes et le degré est 6, 2 et 8 respectivement.

Par conséquent, tous les éléments Y de ${}^4\mathcal{M}_2^{(2)}$ sont des $Y(W)$ pour une cubique W lisse dans \mathbf{P}^5 ne contenant pas de plan. Il existe aussi une construction géométrique : pour un tel Y , il existe une involution anti-symplectique sur Y dont le lieu fixe a deux composantes connexes lisses de dimension 4 qui sont lagrangiennes. L'une d'elles est une cubique lisse W et de plus $Y = Y(W)$.

En résumé, on a le diagramme suivant



Références

- [A] Apostolov, A., Moduli spaces of polarized irreducible symplectic manifolds are not necessarily connected, *Ann. Inst. Fourier* **64** (2014), 189–202.
- [BHPvV] Barth, W., Hulek, K., Peters, C., van de Ven, A., *Compact complex surfaces*, Second edition, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [BHT] Bayer, A., Hassett, B., Tschinkel, Y., Mori cones of holomorphic symplectic varieties of K3 type, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **48** (2015), 941–950.
- [BM] Bayer, A., Macrì, E., MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing: nef and movable cones, *Lagrangian fibrations*, *Invent. Math.* **198** (2014), 505–590.

- [B] Beauville, A., Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 755–782.
- [BD] Beauville, A., Donagi, R., La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 703–706.
- [Bo] Boucksom, S., Le cône kählérien d’une variété hyperkählérienne, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), 935–938.
- [D1] Debarre, O., Hyperkähler manifolds, with an appendix by Macrì, E., notes de cours, <http://www.math.ens.fr/~debarre/HKsurvey.pdf>.
- [D2] ———, Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles, *C.R. Acad. Sc. Paris. Série I Math.* **299** (1984), 681–684.
- [DM] Debarre, O., Macrì, E., On the period map for polarized hyperkähler fourfolds, to appear in *Int. Math. Res. Not. IMRN*.
- [GHS] Gritsenko, V., Hulek, K., Sankaran, G.K., Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds, *Compos. Math.* **146** (2010), 404–434.
- [H] Hassett, B., Special cubic fourfolds, *Compos. Math.* **120** (2000), 1–23.
- [Hu1] Huybrechts, D., *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **158**, Cambridge University Press, 2016.
- [Hu2] ———, A global Torelli theorem for hyperkähler manifolds (after Verbitsky), *Astérisque* **348** (2012), 375–403.
- [Hu3] ———, Compact hyperkähler manifolds: basic results, *Invent. Math.* **135** (1999), 63–113.
- [L] Laza, R., The moduli space of cubic fourfolds via the period map, *Ann. of Math.* **172** (2010), 673–711.
- [LLSvS] Lehn, C., Lehn, M., Sorger, C., van Straten, D., Twisted cubics on cubic fourfolds, *J. reine angew. Math.* **731** (2017), 87–128.
- [LPZ] Li, C., Pertusi, L., Zhao, X., Twisted cubics on cubic fourfolds and stability conditions, (2018), arXiv:1802.01134.
- [M] Markman, E., A survey of Torelli and monodromy results for holomorphic-symplectic varieties, *Complex and differential geometry*, 257–322, Springer Proc. Math. **8**, Springer, Heidelberg, 2011.

- [MM] Markman, E., Mehrotra, S., Hilbert schemes of K3 surfaces are dense in moduli, *Math. Nachr.* **290** (2017), 876–884.
- [Mo1] Mongardi, G., On the monodromy of irreducible symplectic manifolds, *Algebr. Geom.* **3** (2016), 385–391.
- [Mo2] ———, A note on the Kähler and Mori cones of hyperkähler manifolds, *Asian J. Math.* **19** (2015), 583–591.
- [Mu] Mukai, S., Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface, *Invent. Math.* **77** (1984), 101–116.
- [N] Namikawa, Y., Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds, *Math. Ann.* **324** (2002), 841–845.
- [Ni] Nikulin, V., Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric applications, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), 111–177. English transl.: *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 103–167.
- [S] Serre, J.-P., *Cours d’arithmétique*, P.U.F., Paris, 1970.
- [O1] O’Grady, K., Compact hyperkähler manifolds: an introduction, <http://www-irma.u-strasbg.fr/~pacienza/notes-ogradey.pdf>.
- [O2] ———, Involutions and linear systems on holomorphic symplectic manifolds, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 1223–1274.
- [vD] van den Dries, B., Degenerations of cubic fourfolds and holomorphic symplectic geometry, thèse, Universiteit Utrecht, (2012), <http://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/233790/vandendries.pdf>.
- [V] Verbitsky, M., Mapping class group and a global Torelli theorem for hyperkähler manifolds. Appendix A by Eyal Markman, *Duke Math. J.* **162** (2013), 2929–2986.
- [Vi] Viehweg, E., Weak positivity and the stability of certain Hilbert points. III, *Invent. Math.* **101** (1990), 521–543.
- [Y] Yoshioka, K., Bridgeland’s stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface, *Development of moduli theory–Kyoto 2013*, 473–537, Adv. Stud. Pure Math. **69**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016.