HU Berlin Sommersemester 2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Serie 3, Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} t+1 & t+2 & 0 \\ -t+2 & t+1 & 0 \\ -\frac{1}{2}t+2 & -\frac{1}{2}t+1 & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisierbar? Geben Sie in diesen Fällen die Eigenwerte und eine Basis der Eigenräume (in Abhängigkeit von t) an.

Lösungsskizze:
$\det(A - x \cdot E_3) = (t-x)(t^2 - 4 + (t+1-x)^2)$ (Entwicklung nach der dritten Spalte.)
Wir sehen sofort den ersten EW $\lambda_1 = t$ und den zugehörigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Noch zu diskutieren ist die quadratische Gleichung $(t+1-x)^2 + t^2 - 4 = 0$ mit den sich ergebenden EW und EV.
Die Diskriminante der Gleichung ist $4 - t^2$, daher gibt es für $|t| > 2$ keine reellen EW und A ist daher nicht diagonalisierbar.
Im Fall $t = \pm 2$ hat ergibt sich für $(A - \pm 2 \cdot E_3)$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; diese Matrizen haben offenbar Rang 2, damit ist die geometrische Vielfachheit zu den EW 3 (bzw. -1) nur 1, also ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar.
Im Fall $|t| < 2$ haben wir die reellen EW $\lambda_1 = t+1+\sqrt{4-t^2}$ und $\lambda_2 = t+1-\sqrt{4-t^2}$. Wir berechnen die Eigenvektoren mit den Matrizen $\begin{pmatrix} \mp\sqrt{4-t^2} & t+2 & 0 \\ -t+2 & \mp\sqrt{4-t^2} & 0 \\ -\frac{1}{2}t+2 & -\frac{1}{2}t+1 & -1 \mp \sqrt{4-t^2} \end{pmatrix}$.
Im Fall $t \neq \pm\sqrt{3}$ sind alle drei Eigenwerte verschieden, daher ist die Matrix diagonalisierbar. Weiterhin ist dann $-1 \mp \sqrt{4-t^2} \neq 0$, und wir errechnen die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} t+2 \\ \pm\sqrt{4-t^2} \\ (-1 \mp \sqrt{4-t^2})^{-1}((t+2)(\frac{1}{2}t-2) + (\pm\sqrt{4-t^2})(\frac{1}{2}t-1)) \end{pmatrix}$.
Es bleibt der Fall $t = \pm\sqrt{3}$. Hier hat die Matrix $\begin{pmatrix} \mp 1 & \pm\sqrt{3}+2 & 0 \\ \pm\sqrt{3}+2 & \mp 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}+2 & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}+1 & 0 \end{pmatrix}$ den Rang zwei, daher ist die geometrische Vielfachheit bei allen EW eins, aber je einer der EW $\pm\sqrt{3}$ hat die algebraische Vielfachheit zwei, daher ist A auch in hier nicht diagonalisierbar.