Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 09.01.2006 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 9 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ die Menge

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

a) Zeigen Sie: Sind $K \subseteq F \subseteq E$ Körper mit $\dim_K E < \infty$, so ist

$$\dim_K E = \dim_K F \cdot \dim_F E.$$

b) Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V dann auch auf natürliche Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$ gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen $f : V \to W$ sind linear?

a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ und $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 + 3\xi_2 + 5\xi_3 \\ \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 \end{pmatrix}$.

b) $V = W = \mathbb{C}^4$ und $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_4 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{Q}^2$, $W = \mathbb{Q}$ und $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \xi_1 \cdot \xi_2$.

d) $V = W = \{\text{differenzierbare Funktionen } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ und $f(g) = g'$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bilds folgender linearer Abbildungen:

a) $f : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4 \\ \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \end{pmatrix}$.

b) $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, $f(g) = g' - g(0)$.

Aufgabe 5* (10 Punkte)
Es sei p eine Primzahl, und V_p der $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ der Funktionen $f : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von V_p.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{f_0, \ldots, f_p\}$ mit $f_j(x) = x^j$ $(j = 0, \ldots, p)$ eine Basis von V_p bilden.