Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 30.01.2006 nach der Vorlesung oder
bis 11.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 12 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Assoziativität des Matrixprodukts (vgl. Skript, Seite 42, Beispiel (iv)) durch explizite Berechnung, d.h. ohne Verwendung der Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathfrak{B}$ sowie der Basis

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiterhin betrachten wir den reellen Vektorraum $W = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathfrak{C}$ sowie der Basis

$$\mathfrak{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Geben Sie die Basistransformationsmatrizen für den Basiswechsel von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ und von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$ an.

b) Geben Sie die Basistransformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathfrak{C}'$ nach $\mathfrak{C}$ an.

c) Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ sei bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mittels der Basistransformationsformel die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie alle natürlichzahligen Potenzen der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Finden Sie alle $(n \times n)$-Matrizen, die mit allen anderen $(n \times n)$-Matrizen kommutieren.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$ eine beliebige Matrix.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $a, b, c, d \in K$ an, so dass A invertierbar ist.

b) Berechnen Sie in diesem Fall die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Es sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{H}$ ist mit der Addition und Multiplikation von Matrizen ein nicht-kommutativer Ring.

b) Jede von der Nullmatrix verschiedene Matrix in $\mathbb{H}$ besitzt eine Inverse in $\mathbb{H}$, d.h. $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper.

c) Jedes Element aus $\mathbb{H}$ lässt sich eindeutig als Summe $\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Bemerkung: Man nennt $\mathbb{H}$ die *Hamiltonschen Quaternionen*.