Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 24.04.2006 nach der Vorlesung oder
bis 15.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 1 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen (dabei ist $i \in \mathbb{C}$, so dass $i^2 = -1$, $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & (2i+2) \\ 2i & (2i+1) & i \\ i & (i+1) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2t & t & -1 & 3t \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ t & 1 & -1 & 0 \\ 2t & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Diskutieren Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} ax + b^2 y &= a - b \\ a^2 x + by &= b - a. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen Sie folgende Formel für die Vandermondesche Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)\,.$$

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 1 & \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (n\text{-reihige Matrix, 0 an allen Leerstellen})$$

für $n = 1, 2, \ldots, 6$ und leiten Sie eine Rekursionsformel für $D_n(\lambda)$ her!

Zeigen Sie: $D_n(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \lambda^{n-2k}$.