Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin (freiwillig): Montag, 16.07.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Zusatzserie (0+80 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Es sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: $\sqrt{n}$ ist entweder eine irrationale oder eine natürliche Zahl.

b) Zeigen Sie: $\sum_{j=1}^{\infty} 5^{-j^2}$ ist eine irrationale Zahl.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Definieren Sie die Begriffe „maximales Ideal“, „rationale Cauchyfolge“, „reelle Cauchyfolge“ und „rationale Nullfolge“.

b) Zeigen Sie, dass die rationalen Nullfolgen ein maximales Ideal in der Menge der rationalen Cauchyfolgen sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Definieren Sie die Begriffe „Euklidischer Ring“ und „Hauptidealring“.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]$ ein Euklidischer Ring ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist.

d) Bestimmen Sie die Menge aller maximalen Ideale in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Für ein Element $b \in R$ ist die Menge $(\mathfrak{a} : b)$ wie folgt definiert:

$$(\mathfrak{a} : b) := \{r \in R \mid r \cdot b \in \mathfrak{a}\}.$$

Zeigen Sie, dass diese Menge ein Ideal ist, das $\mathfrak{a}$ umfasst. Benutzen Sie dies, um einen alternativen Beweis dafür anzugeben, dass jedes maximale Ideal ein Primideal ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und $Z(G) := \{z \in G \mid g \circ z = z \circ g \text{ für alle } g \in G\}$ das Zentrum von G. Wir wissen, dass $Z(G) \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G ist. Daher existiert die Faktorgruppe $G/Z(G)$.
Zeigen Sie:
Wenn die Faktorgruppe $G/Z(G)$ eine zyklische Gruppe ist, d.h. es existiert ein $g \in G$ mit

$$G/Z(G) =< g \circ Z(G) >= \{\ldots, g^{-2} \circ Z(G), g^{-1} \circ Z(G), e \circ Z(g), g \circ Z(G), g^2 \circ Z(G), \ldots\},$$

dann ist G eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei E eine Menge mit mindestens zwei Elementen. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ wählen wir als additive Verknüpfung die symmetrische Differenz $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ und als multiplikative Verknüpfung den Durchschnitt $\cap$.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Bestimmen Sie die Nullteiler und Einheiten dieses Rings.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

a) Gibt es einen Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, der kein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist?

b) Finden Sie einen Unterring des Polynomrings $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$, der kein Ideal von $\mathbb{Z}[X]$ ist.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $6n+5$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt, und geben Sie mindestens drei davon an, die größer als 50 sind.