HU Berlin Sommersemester 2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 17.07.2006 nach der Vorlesung oder
bis 15.00 Uhr im Raum RUD 25, 2.302, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 13 (Zusatzserie) 0 + 50 Punkte

Aufgabe 1* (10 Punkte) **("dritter projektiver Versuch")**

Wir betrachten im $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ die projektiven Ebenen

$$E_1 := \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : (\xi_0 - \xi_2)] \mid \xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\} \text{ bzw.}$$

$$E_2 := \{[\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : (-\mu_1 - \mu_2)] \mid \mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es sei weiterhin $f : E_1 \longrightarrow E_2$ die Zentralprojektion mit Zentrum $P = [1 : 0 : 0 : 2]$, d.h. für $P_1 \in E_1$ ist $f(P_1)$ der Schnittpunkt der projektiven Geraden $\mathbb{P}(P, P_1)$ mit E_2.

a) Zeigen Sie, dass f eine projektive Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der projektiven Basen

$$\{[1 : 0 : 0 : 1],\ [1 : 1 : 0 : 1],\ [1 : 0 : 1 : 0]\ , [3 : 1 : 1 : 2]\} \text{ von } E_1, \text{ bzw.}$$

$$\{[1 : 0 : 1 : -1], [1 : 1 : 0 : -1], [1 : 1 : -1 : 0]\ , [3 : 2 : 0 : -2]\} \text{ von } E_2.$$

Bemerkung: Dies ist die im projektiven Raum "gerettete" Aufgabe 2 aus Serie 11.

Aufgabe 2* (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Rang und die Signatur der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine affine Basis des $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ an, so dass die Quadrik

$$x^t \cdot A \cdot x + x^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 = 0$$

Normalform hat, und bestimmen Sie den Typ dieser Quadrik.

Aufgabe 3* (10 Punkte)

Eine *projektive Quadrik* in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ kann analog zum affinen Fall als Nullstellenmenge einer Gleichung

$$\sum_{j,k=0}^{2} \alpha_{j,k}\xi_j\xi_k = 0$$

beschrieben werden. Finden Sie solche $\alpha_{j,k}$, dass die Einschränkung der Quadrik auf die affine Ebene U_0 eine Ellipse, auf U_1 eine Hyperbel und auf U_2 eine Parabel ist (zur Definition von U_0, U_1, U_2 siehe Serie 12, Aufgabe 2).

Aufgabe 4* (20 Punkte)

Die Verbindung von Mathematik und Literatur ist noch relativ wenig ausgeprägt, obwohl es einige Beispiele gibt, z.B. das bekannte mathematische Liebesgedicht von Stanisław Lem (1921-2006).

Komm, laß uns tanzen in den Banachraum,
wo Punktepaare wohlgeordnet sind,
und Riemannsche Blätter rascheln im Wind,
gefaltet, geheftet, schön wie im Traum.

Fixpunkte träumen von Kontraktionen,
Vektor schmeichelt der schönen Matrize,
Spalten bringt er in siedende Hitze,
heiß und ergodisch glühen die Zonen.

Du bist mein maximales Ideal,
der Zustand meiner Liebe ist stabil,
doch deine Kovarianten sind labil,
und unbestimmt wie Eulers Integral.

Den Ring aus Polynomen gab ich dir,
dazu die Markovkette mit dem Stein,
all deine Tensorfelder waren mein,
nur dein Quotientenkörper fehlte mir.

Ich pfeife auf Bernoullis Fixpunktsatz,
was solln mir Hilbert, Euler oder Venn,
mit ihren Indizes von eins bis n,
wenn du mich liebst, mein rationaler Schatz.

Mordells Vermutung ist kein leerer Wahn,
denn deine Kurven sind mein höchstes Ziel,
ich zählte süßer Punkte endlich viel,
und meine Graphen kreuzten ihre Bahn.

In deinen Augen glänzt der Eigenwert,
in jedem Seufzer schwingt ein Tensor mit,
du weit nicht, wie mein Operator litt,
hast du ihm doch Funktionen stets verwehrt.

Lösch mich nicht, denn was wird von mir bleiben?
Parabeln, deren Brennpunkt niemand weiß,
Abzissen, zwei Mantissen und ein Kreis.
Laserstrahl wird mich zu Staub zerreiben.

Erstarren meine positiven Glieder,
lädt man mein topologisch Leichenhemd,
vergiß mich nicht, werd' mir nicht teilerfremd,
und sing' am Grab mir lineare Lieder.

a) Bringen Sie ihren Lieblingssatz aus den ersten beiden Semestern der linearen Algebra in Versform, und

b) dichten Sie auch noch den Beweis dazu.

Hinweis: Bitte mindestens jeweils zwei Strophen dichten. Wortgleiche Lösungen werden bei dieser Aufgabe nicht akzeptiert.