HU Berlin Sommersemester 2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 04.06.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 6 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

a) Das Zentrum $Z(G) := \{z \in G \mid g \circ z = z \circ g,\ \forall g \in G\}$ ist ein Normalteiler in G.

b) Welche der Untergruppen der S_3 (s. Serie 4, Aufgabe 3d) sind Normalteiler?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2.

a) Zeigen Sie, dass H in G Normalteiler ist!

b) Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus von G nach der zyklischen Gruppe mit zwei Elementen an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Es sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Verknüpfung $\bullet$ auf G/N assoziativ ist, beweisen Sie die Existenz eines neutralen Elementes und von inversen Elementen.

b) Es seien k ein Körper, V ein k-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass die abelsche Faktorgruppe $(V/W, +)$ sogar ein k-Vektorraum der Dimension $\dim_k(V/W) = \dim_k(V) - \dim_k(W)$ ist.

c) Es seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Weiter bezeichne $\mathrm{GA}(V)$ die Gruppe der bijektiven affinen Selbstabbildungen des affinen Raums $\mathbb{A}(V)$ und $\mathrm{T}(V)$ die Untergruppe der Translationen. Beweisen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes die Isomorphie

$$\mathrm{GA}(V)/\mathrm{T}(V) \cong \mathrm{GL}(V).$$