Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra/Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: Montag, 11.06.2007 nach der Vorlesung oder bis 13.00 Uhr im Sekretariat von Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 7 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Es sei A eine Menge mit mindestens zwei Elementen. Zeigen Sie, dass in der Halbgruppe $(\mathrm{Abb}(A), \circ)$ keine der beiden Kürzungsregeln gilt.

b) Geben Sie mindestens zwei weitere Beispiele von Halbgruppen an, die nicht regulär sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ regulär ist.

b) Führen Sie die Konstruktion der $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ umfassenden Gruppe aus der Vorlesung konkret durch und verwenden Sie dabei für die Äquivalenzklasse $[a, b]$ die Bezeichnung $\frac{a}{b}$. Erläutern Sie das Ergebnis.

c) Sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$ eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] := [aa' + bb', ab' + a'b] \quad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass diese Operation assoziativ und kommutativ ist und die beiden Distributivgesetze gelten.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich für die Ordnungsrelation „$<$“ auf den ganzen Zahlen folgende, von den natürlichen Zahlen her bekannte Regeln verallgemeinern lassen zu:

a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, gilt mit $a < b$ auch $a \cdot n < b \cdot n$.