Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 01.11.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 2 (50+0 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Der Quotient $G/Z(G)$ einer Gruppe nach ihrem Zentrum sei zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

a) Das Zentrum $Z(G)$ von G ist ein Normalteiler von G.

b) Der Normalisator $N_G(H)$ von H in G ist eine Untergruppe von G.

c) Die Untergruppe H ist Normalteiler in $N_G(H)$.

d) Falls es eine Untergruppe $H' \leq G$ gibt, so dass $H \leq H'$ Normalteiler ist, so gilt $H' \leq N_G(H)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Für $x, y \in G$ nennen wir das Gruppenelement $[x, y] := x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1}$ den *Kommutator von x und y*.

a) Beweisen Sie: Für beliebige $x, y \in G$ ist $[x, y]^{-1} = [y, x]$.

b) Beweisen Sie: Für beliebige $x, y, z \in G$ gilt $[x \circ y, z] = x \circ [y, z] \circ x^{-1} \circ [x, z]$.

c) Überprüfen Sie, ob in der Permutationsgruppe S_3 für alle Elemente x, y, z die Gleichung $[[x, y], z] = \mathrm{id}$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe G der Ordnung n isomorph ist zu einer Untergruppe von S_n.
(**Hinweis:** Es bezeichne $\underline{G}$ die Menge der Elemente von G. Für $g \in G$ sei $f_g : \underline{G} \longrightarrow \underline{G}$ die (bijektive) Abbildung, welche durch die Zuordnung $x \mapsto g \circ x$ ($x \in \underline{G}$) gegeben ist. Man zeige, dass durch $g \mapsto f_g$ ein injektiver Homomorphismus von G in die Gruppe der Permutationen von $\underline{G}$ definiert wird.)

Aufgabe 5 (10 Punkte)

a) Geben Sie alle Gruppen der Ordnung 10 bis auf Isomorphie an.

b) Geben Sie alle Gruppen der Ordnung 8 bis auf Isomorphie an.
(**Hinweis**: Es gibt drei abelsche Gruppen sowie die

$$Diedergruppe \quad D_4 =< r, s \mid r^4 = s^2 = e, sr = r^3 s >$$

und die

$$Quaternionengruppe \quad Q =< \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji > .)$$