HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 04.12.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 7 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen der S_4.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe G eine Kompositionsreihe besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ Gruppen und $\varphi_n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ surjektive Homomorphismen ($n = 1, 2, \ldots$). Der *projektive Limes*

$$G = \varprojlim_n G_n$$

des sogenannten projektiven Systems $\{G_n, \varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist dann definiert durch

$$\varprojlim_n G_n = \{(\ldots, g_2, g_1, g_0) \mid g_{n-1} = \varphi_n(g_n)\ (n = 1, 2, \ldots)\} \subseteq \prod_{n=0}^{\infty} G_n.$$

Zeigen Sie:

a) G ist eine Gruppe, und es existieren natürliche Homomorphismen $\pi_n : G \longrightarrow G_n$ mit $\pi_{n-1} = \varphi_n \circ \pi_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

b) Sind H eine weitere Gruppe und $\psi_n : H \longrightarrow G_n$ Homomorphismen mit $\psi_{n-1} = \varphi_n \circ \psi_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), so existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\psi : H \longrightarrow G$, der $\psi_n = \pi_n \circ \psi$ ($n = 0, 1, \ldots$) erfüllt. Diese Eigenschaft bestimmt G bis auf Isomorphie eindeutig.

c) Im Spezialfall $G_n = \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ (p Primzahl) mit den kanonischen Projektionen φ_n werden die Elemente des projektiven Limes'

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$$

p-adische Zahlen genannt. Zeigen Sie, dass mit der Restklassenabbildung $\psi_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ die durch b) gegebene Abbildung $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel einer torsionsfreien abelschen Gruppe an, die nicht frei ist.

b) Finden Sie eine abelsche Gruppe, deren Elemente alle endliche Ordnung haben, die aber nicht eine direkte Summe von zyklischen Gruppen ist.