Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I
Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 18.12.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 9 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien R ein Integritätsbereich, $a, b \in R$ und $\mathfrak{a} = (a)$, $\mathfrak{b} = (b)$ die zugehörigen Hauptideale. Zeigen Sie:

a) Es gilt die Gleichheit: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = ((a, b))$, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist.

b) Es besteht die Äquivalenz: $b|a \Longleftrightarrow \mathfrak{b}|\mathfrak{a}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien p eine Primzahl und $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad n, dessen ganzzahlige Koeffizienten folgende Bedingungen erfüllen:

(i) $p \nmid a_n$,

(ii) $a_j \equiv 0 \mod p$ $(j = 0, \ldots, n-1)$,

(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Zeigen Sie: f ist in $\mathbb{Q}[X]$ unzerlegbar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ unzerlegbar sind:

a) $f(X) = X^4 + aX - 1$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) $g(X)=X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$, p Primzahl.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

a) Die Menge
$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$
mit den natürlichen Operationen
$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) &:= (a + c) + (b + d)\sqrt{5}\\ (a + b\sqrt{5}) \cdot (c + d\sqrt{5}) &:= (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}\end{aligned}$$
ist ein Ring. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ sogar ein Körper ist.

b) Zeigen Sie, dass für $\alpha = a+b\sqrt{5}$ und $\bar{\alpha} := a-b\sqrt{5}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ die Größe $N(\alpha) := \alpha\cdot\bar{\alpha}$ in $\mathbb{Q}$ die Eigenschaft $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$ hat.

c) Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] := \left\{ \frac{a + b\sqrt{5}}{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}\,,\ a \equiv b \mod 2 \right\}$$
mit den vorhergehenden Operationen ein Euklidischer Ring ist, d.h. $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist ein Integritätsbereich mit der Eigenschaft, dass zu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\beta \neq 0$, Elemente $\sigma, \rho \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mit
$$\alpha = \sigma \cdot \beta + \rho$$
existieren, wobei $\rho = 0$ oder $|N(\rho)| < |N(\beta)|$ gilt.