Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
L. Kotan, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 1

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 18. April 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 1.1 (6 Punkte)
Beweisen Sie:

a) Die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Die Funktion $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) Sei $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ohne Nullstellen und f gegeben durch
$$f(x) := \ln|h(x)|.$$
Dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$.

d) Sei $a + ib \in \mathbb{C}$ eine feste komplexe Zahl mit $b \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch:
$$f(x) := \ln(|x - (a+ib)|) + i \cdot \arctan\frac{x-a}{b}.$$
Dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{x-(a+ib)}$.

Aufgabe 1.2 (3+3 Punkte)

a) Untersuchen Sie mit Methoden der Differentialrechnung, wieviele reelle Lösungen die Gleichung $x(x - \sin x) = \cos x$ hat.
Hinweis: Wie verhalten sich beide Seiten dieser Gleichung bei $0 \leq x \leq \pi$?

b) Es sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Funktion, die auf $(0,1)$ differenzierbar ist und $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in (0,1)$ erfüllt. Beweisen Sie, dass f genau einen Fixpunkt hat. Gilt diese Aussage auch, wenn man nur die Stetigkeit von f voraussetzt?

Aufgabe 1.3 (2+2 Punkte)

a) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die mit einer Konstanten $M > 0$ und einem $\alpha > 1$ die Abschätzung $|f(x)| \leq M|x|^\alpha$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(0) = 0$.

b) Gegeben ist nun eine Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_1(0) = 0$ und $f_1(x) = \sin(1/x)$ für $x \neq 0$. Für $k = 2,3,4$ sei weiter $f_k(x) = x^{k-1} f_1(x)$. Ist f_k für $k = 1,\dots,4$ bei $x = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ unendlich oft differenzierbar ist und $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Insgesamt: **20 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 1.Z (1+1+3 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $C(K, \mathbb{R})$ der Banachraum von stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$, mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \max \left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in K \right\}.$$

Sei $X \subset C(K, \mathbb{R})$ die Teilmenge

$$X := \left\{ f \in C(K, \mathbb{R}) \;\middle|\; f \text{ ist stetig differenzierbar} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass X ein linearer Unterraum von $C(K, \mathbb{R})$ ist, und dass die Abbildung $X \to C(K, \mathbb{R}) : f \mapsto f'$ linear ist.

b) Zeigen Sie, dass X dicht in $C(K, \mathbb{R})$ liegt, und, dass der normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|_\infty)$ deswegen kein Banachraum sein kann.

c) Ist die Abbildung $(X, \|\cdot\|_\infty) \to (C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) : f \mapsto f'$ stetig? Beweisen Sie es, oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 1.A Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{für } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ |x| & \text{sonst }. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen f_n differenzierbar sind, die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert, ihre Grenzfunktion aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 1.B Die Begriffe von Differenzierbarkeit und Ableitungen $f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ können auch für Funktionen $f : \mathbb{Q} \to E$ definiert werden, gegeben ein beliebiger normierter Vektorraum E. Der wesentliche Unterschied zu unserer Definition in der Vorlesung ist, dass wir jetzt Funktionen auf einem *unvollständigen* metrischen Raum betrachten. Manches ändert sich dadurch nicht, z.B. stimmt es noch, dass differenzierbare Funktionen immer stetig sind, und die gewöhnlichen Rechenregeln für die Ableitung gelten auch noch. Aber die Mittelwertsätze gelten nicht, und deswegen ist folgendes möglich:

a) Finden Sie eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, die nicht monoton steigend ist aber trotzdem $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ erfüllt.

b) Finden Sie eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, die nicht konstant ist aber trotzdem $f' \equiv 0$ erfüllt.

c) Wo ist das Problem, wenn Sie versuchen, den Mittelwertsatz von Lagrange (Satz 5.8 im Skript) für differenzierbare Funktionen $f : \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\} \to \mathbb{R}$ zu beweisen?