HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*
SoSe 2019

Übungsblatt 10

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 27. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 10.1 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^x e^{\sqrt{3t+9}}\,dt,\qquad x\in(-2,\infty)$

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\,dt,\qquad x\in(0,\infty)$

Aufgabe 10.2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte) Sei $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein Intervall mit $a<b$, und E ein Banachraum. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Riemann-Integrals:

a) Hat $f:I\to E$ den Wert $f(x)=0$ für alle bis auf endlich viele Punkte $x\in I$, dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

b) Sei $\mathcal{P}=\{x_0,\dots,x_n\}$ eine Zerlegung von I mit Teilintervalle $I_k:=[x_{k-1},x_k]$. Wenn die Einschränkungen $f|_{I_k}:I_k\to E$ einer Funktion $f:I\to E$ für alle $k=1,\dots,n$ Riemann-integrierbar sind, dann ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$.
Hinweis: Zerlegungen der verschiedenen I_k für $k=1,\dots,n$ können vereinigt werden, um eine feinere Zerlegung von I zu definieren.

c) Sind $f,g:I\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f(x)\geq g(x)$ für alle $x\in I$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$.

d) Ist $f:I\to E$ Riemann-integrierbar, dann ist $f|_{I'}:I'\to E$ für jedes Teilintervall $I'\subset I$ auch Riemann-integrierbar. *Hinweis: Cauchy-Kriterium.*

e) Ist $f:I\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(x)\geq 0$ für alle $x\in I$ und $f(x_0)>0$ für ein $x_0\in I$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx>0$. *Hinweis: Wenden Sie Teilaufgaben b), c) und d) an.*

Aufgabe 10.3 (3 + 2 Punkte)

a) Sei E ein Banachraum und $f:\mathbb{R}\to E$ eine auf jedem kompakten Intervall $I\subset\mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktion, die auch eine Stammfunktion $F:\mathbb{R}\to E$ besitzt, und die auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ aber *nicht unbedingt in* $x=0$ stetig ist. Beweisen Sie, dass $g(x):=\int_0^x f(t)\,dt$ dann eine Stammfunktion von f ist.

b) Finden Sie eine auf jedem kompakten Intervall $I\subset\mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, so dass die Funktion $g(x):=\int_0^x f(t)\,dt$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ aber nicht in $x=0$ differenzierbar ist, und folgern Sie, dass f keine Stammfunktion besitzt.

Achtung: In der Vorlesung wurde vom Mittelwertsatz ein Resultat über Riemann-integrierbare Funktionen $I\to\mathbb{R}^m$ mit Stammfunktionen hergeleitet, das aber in Teilaufgabe a) nicht gilt, weil E nicht $\mathbb{R}^m$ sondern ein beliebiger Banachraum ist. Es wurde aber auch eine Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen, die nicht voraussetzt, dass f überall stetig ist.

Aufgabe 10.4 (3 Punkte) Beweisen Sie direkt von der Definition der Integrierbarkeit,[1] dass die folgende Funktion nicht Riemann-integrierbar ist:

$$\delta : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \delta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational}, \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational}, \end{cases}$$

Insgesamt: **26 Punkte**

Aufgabe 10.Z (3 + 3 Punkte)
Sei $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, und bezeichne mit $C^k(I)$ der Vektorraum von k-fach stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. In Aufgabe 3.Z wurde für jede ganze Zahl $k \geq 0$ eine Norm $\|\cdot\|_{C^k}$ auf $C^k(I)$ definiert, so dass $C^k(I)$ ein Banachraum und $C^k(I) \to C^0(I) : f \mapsto f^{(k)}$ eine stetige lineare Abbildung wird. In dieser Aufgabe betrachten wir die Teilmenge

$$X^k := \{ f \in C^k(I) \mid f(a) = f(b) = 0 \}.$$

Dies ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $C^k(I)$, und daher auch ein Banachraum mit der gleichen Norm. Beweisen Sie:

a) Die stetige lineare Abbildung $\mathbf{T} : X^2 \to C^0(I) : f \mapsto f''$ ist bijektiv.

b) Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für jedes $f \in X^2$, gilt $\|f\|_{C^0} \leq c\|f'\|_{C^0}$ und $\|f'\|_{C^0} \leq c\|f''\|_{C^0}$, und $\mathbf{T}^{-1} : C^0(I) \to X^2$ ist daher stetig.
Hinweis: Diese Ungleichungen sind falsch für $f \in C^2(I)$ im Allgemeinen—sie hängen also wesentlich von der Randbedingung $f(a) = f(b) = 0$ ab, die unter Anderem impliziert, dass auch f' irgendwo in (a,b) verschwinden muss. (Warum?)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 10.A Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^t \sin \pi t \, dt$ und $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} \, dx$.

Aufgabe 10.B Beweisen Sie die folgenden weiteren Eigenschaften des Riemann-Integrals für Funktionen $I := [a,b] \to E$, wobei E ein Banachraum ist über den Körper $\mathbb{K}$:

a) Integration ist linear, d.h. für gegebene Riemann-integrierbare Funktionen $f, g : I \to E$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + \mu g : I \to E$ auch Riemann-integrierbar, mit $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx$.

b) Gegeben ein zweiter Banachraum F, eine lineare Abbildung $\mathbf{L} : E \to F$ heißt *beschränkt*, falls existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\|\mathbf{L}v\| \leq c\|v\|$ für alle $v \in E$ gilt.[2] Falls $f : I \to E$ Riemann-integrierbar und $\mathbf{L} \in \mathscr{L}(E,F)$ beschränkt ist, dann ist $\mathbf{L} \circ f : I \to F$ auch Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \mathbf{L}(f(x)) \, dx = \mathbf{L}\left(\int_a^b f(x) \, dx \right).$$

Beweisen Sie damit die Formeln $\int_a^b \overline{f(x)} \, dx = \overline{\int_a^b f(x) \, dx}$ und $\int_a^b (f_1(x), f_2(x)) \, dx = \left(\int_a^b f_1(x) \, dx, \int_a^b f_2(x) \, dx \right)$ für komplex- bzw. vektorwertige Funktionen.

---

[1] Im Skript von Helga Baum wird dieses Resultat als Konsequenz des Lebesgueschen Integrierbarkeitskriteriums hergeleitet, aber dies wurde in unserer Vorlesung nicht bewiesen, also dürfen Sie es hier nicht anwenden.

[2] Folgendes lässt sich eher leicht beweisen: eine lineare Abbildung $\mathbf{L} : E \to F$ ist beschränkt genau dann, wenn sie stetig ist. Wir wissen insb., dass $\mathbf{L}$ immer beschränkt ist, falls $\dim E < \infty$.