Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 11

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 11. Juli 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 11.1 (3 + 3 Punkte) Verwenden Sie die Taylorformel mit Integralrestglied, um die folgenden Aussagen zu beweisen. (Hier bezeichnet E ein beliebiger Banachraum.)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to E$ eine glatte Funktion und $a \in I$ ein Punkt mit $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k)}(a) = 0$ für eine ganze Zahl $k \geq 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $g : I \to E$, so dass die Relation $f(x) = (x-a)^{k+1} g(x)$ erfüllt ist.

b) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : \mathcal{U} \to E$ eine glatte Funktion und $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ ein Punkt mit $f(\mathbf{a}) = 0$. Dann existiert eine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ von $\mathbf{a}$ und glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_n : \mathcal{V} \to E$, so dass auf $\mathcal{V}$ gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \cdot g_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Aufgabe 11.2 (3 Punkte) Beweisen Sie: für $x > 2$ gilt

$$\frac{d}{dx} \int_2^x \frac{t^x - 1}{\ln t}\, dt = \frac{x^x - 1}{\ln x} + \frac{x^{x+1} - 2^{x+1}}{x+1}.$$

Hinweis: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $F(u,v) := \int_2^u \frac{t^v - 1}{\ln t}\, dt$ *und wenden Sie für* f *die Kettenregel an.*

Aufgabe 11.3 (2 + 2 + 2 Punkte) Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale, und dass in den ersten zwei Fällen auch absolute Konvergenz vorliegt:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{x}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{t} \cos(t^2)\, dt$

Aufgabe 11.4 (2 + 2 Punkte) Bestimmen Sie durch Integration, ob die folgenden Reihen konvergieren:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{2}{n(\ln n)^2}$

Aufgabe 11.5 (2 + 2 Punkte)

a) Finden Sie eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass f_n punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$ konvergiert aber $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt; insb. gilt $\int_0^1 f_n(x)\, dx \not\to \int_0^1 f(x)\, dx$.

b) Finden Sie eine Folge von uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass f_n gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = 0$ konvergiert aber $\int_0^\infty f_n(x)\, dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt; insb. gilt $\int_0^\infty f_n(x)\, dx \not\to \int_0^\infty f(x)\, dx$.

Aufgabe 11.6 (2 + 2 + 2 Punkte) Wir betrachten die glatte Funktion $F : [1, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $F(t, x) := x^3 e^{-tx^2}$.

a) Berechnen Sie eine explizite Formel für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch das uneigentliche Integral $f(x) := \displaystyle\int_1^\infty F(t, x)\, dt$.

b) Zeigen Sie, dass f glatt ist, und dass die Formel $f'(x) = \displaystyle\int_1^\infty \partial_x F(t, x)\, dt$ für alle $x \neq 0$ gilt, aber *nicht* für $x = 0$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolgen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \int_1^n F(t, x)\, dt, \qquad g_n(x) := \int_1^n \partial_x F(t, x)\, dt.$$

Per Definition konvergiert f_n punktweise gegen f. Zeigen Sie, dass g_n auf dem Intervall $(0, 1]$ punktweise gegen f' konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

Aufgabe 11.7 (4 + 4 Punkte) Die folgenden Resultate wurden in der Vorlesung für die Berechnung des Integrals $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\pi/2}$ benötigt. Wir betrachten für $x \geq 0$ die Funktion

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1 + t^2}\, dt.$$

Die Konvergenz dieses Integrals folgt aus dem Majorantenkriterium, wegen $e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}/(1+t^2) \leq 1/(1 + t^2)$ und $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

a) Beweisen Sie: $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.
Hinweis: In beiden Fällen hilft es, das Integral als eine Summe von zwei Integralen auf Intervallen $[0, N]$ und $[N, \infty)$ zu betrachten, wobei $N > 0$ im ersten Fall groß ist, und im zweiten Fall klein. Sie dürfen nie vergessen, dass $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ konvergiert.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$G_n(x) := \int_0^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}}{1 + t^2} \right) dt = -x \int_0^n e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\, dt.$$

Beweisen Sie, dass G_n bei $n \to \infty$ auf jeder kompakten Teilmenge von $(0, \infty)$ gleichmäßig gegen $G(x) := -x \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)}\, dt$ konvergiert. Folgern Sie, dass $F'(x) = G(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Insgesamt: **37 Punkte**

Aufgabe 11.Z (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Für diese Aufgabe brauchen wir ein paar algebraische Grundbegriffe: sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Element $x \in \mathcal{R}$ heißt *Einheit*, falls ein Element $x^{-1} := y \in \mathcal{R}$ mit $xy = 1$ existiert. Ein Element $x \in \mathcal{R}$ mit $x \neq 0$ heißt *irreduzibel*, falls x keine Einheit ist und nicht als Produkt $x = ab$ von zwei Nicht-Einheiten $a, b \in \mathcal{R}$ geschrieben werden kann. Gegeben $x, y \in \mathcal{R}$ sagen wir "x teilt y," falls die Relation $y = xz$ für ein $z \in \mathcal{R}$ erfüllt ist. Diese Bedingung ist nur interessant, wenn x keine Einheit ist, denn sonst kann man immer $y = x(x^{-1}y)$ schreiben, d.h. die Einheiten teilen alle anderen Elemente.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_n$ die Menge aller Äquivalenzklassen $[f]$ von glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei die Äquivalenzrelation $f \sim g$ bedeutet, dass f und g auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gleich sind. Für zwei glatte Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hängen die Äquivalenzklassen $[f + g]$ und $[fg]$ nur von den Äquivalenzklassen $[f]$ und $[g]$ ab, also hat $\mathcal{O}_n$ die Struktur eines kommutativen Rings mit $[f] + [g] := [f + g]$ und $[f][g] := [fg]$. Das Einselement $1 = [e] \in \mathcal{O}_n$ ist die Äquivalenzklasse der konstanten Funktion $e(x) := 1$, und $[f] \in \mathcal{O}_n$ ist eine Einheit genau dann, wenn $f(0) \neq 0$; in diesem Fall ist die Funktion $1/f$ definiert und glatt auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$, also bestimmt sie ein Element $[1/f] \in \mathcal{O}_n$ mit $[f][1/f] = 1$.[1]
In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die folgende Frage: gegeben $[f] \in \mathcal{O}_n$ irreduzibel, welche Elemente $[h] \in \mathcal{O}_n$ werden von $[f]$ geteilt? Dies würde heißen, dass in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$, die Gleichung $h = fg$ für eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfüllt ist. Eine offensichtlich notwendige Bedingung dafür ist, dass h auf $f^{-1}(0)$ (zumindest in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$) verschwindet. Beweisen Sie, dass diese Bedingung im Fall $n = 1$ aber nicht in den Fällen $n \geq 2$ auch hinreichend ist; konkret:

a) Ein Element $[f] \in \mathcal{O}_1$ ist genau dann irreduzibel, wenn $f(0) = 0$ aber $f'(0) \neq 0$.
Hinweis: Aufgabe 11.1 ist hier relevant.

b) Seien $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen, so dass $[f] \in \mathcal{O}_1$ irreduzibel ist und h auf $f^{-1}(0)$ verschwindet. Dann wird $[h]$ von $[f]$ geteilt.
Hinweis: Nach einem "Koordinatenwechsel" können Sie wegen des Umkehrsatzes hier annehmen, dass f die Funktion $f(x) = x$ ist.

c) Für $n \geq 2$ stellt die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) := x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ein irreduzibeles Element $[f] \in \mathcal{O}_n$ dar.
Hinweis: Falls $f = gh$ mit $g(0) = h(0) = 0$, dann impliziert der Satz von Taylor $\nabla g(0) \neq 0$ und $\nabla h(0) \neq 0$ (warum?). Wie müsste die Menge $f^{-1}(0)$ dann aussehen?

d) Zu der Funktion f in Teilaufgabe c) gibt es glatte Funktionen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass h auf $f^{-1}(0)$ verschwindet aber $[f]$ teilt $[h]$ nicht.

Bemerkung: Würden wir nicht reell- sondern komplexwertige Funktionen betrachten, wäre das Beispiel in Teilaufgabe c) nicht mehr irreduzibel, z.B. gilt $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$. In der komplexen Analysis kann man tatsächlich zeigen, dass ein Resultat analog zu Teilaufgabe b) für komplex-analytische Funktionen $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt.[2]

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 11.A Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ist glatt. Dies kann ähnlich wie bei Aufgabe 1.4 bewiesen werden, und Sie dürfen es für diese Aufgabe als gegeben ansehen. Beweisen Sie:

a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine glatte und monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $f(x) = 0$ für $x \leq a$ und $f(x) = 1$ für $x \geq b$ erfüllt.[3]

[1] Wegen Aufgabe 11.A(b) spielt es hier keine Rolle, dass $1/f$ vielleicht nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist; Hauptsache, es gibt eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit $1/f$ übereinstimmt.

[2] Das besagte Resultat wird auf Seite 11 des Buches *Principles of Algebraic Geometry* von Griffiths und Harris als "schwache Nullstellensatz" bezeichnet.

[3] Funktionen dieser Art werden oft "cutoff functions" genannt.

Hinweis: Hat φ eine Stammfunktion?

b) Gegeben eine glatte Funktion $f : \mathcal{U} \to E$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ gibt es eine glatte Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die auf einer Umgebung von $\mathbf{a}$ mit f übereinstimmt. Weiter: für eine gegebene Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{a}$ darf o.B.d.A. angenommen werden, dass $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}$ verschwindet.
Bemerkung: Zusammengefasst heißt es, jede glatte Funktion auf einer Umgebung eines Punktes kann auf beliebige grössere Definitionsbereiche glatt erweitert werden.

c) Finden Sie eine reell-analytische Funktion auf einer Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}$, die keine Erweiterung als reell-analytische Funktion auf $\mathbb{R}$ zulässt.

Aufgabe 11.B Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \displaystyle\int_{-x}^{x^2} e^{xt^2}\,dt$ die Differentialgleichung

$$f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)e^{x^3} + x\left(2 + \frac{x}{2}\right)e^{x^5}$$

erfüllt.

Aufgabe 11.C
Finden Sie eine stetige Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\int_0^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergiert aber $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Aufgabe 11.D Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Da dieses Integral uneigentlich ist, kann man keinen Satz aus der Vorlesung direkt anwenden, um es bzgl. x zu differenzieren. In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, dass die Formel

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x^n} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

trotzdem für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, also $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist insb. eine glatte Funktion.

a) Beweisen Sie, dass für alle $k,n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (-1,\infty)$, das uneigentliche Integral $i_k := \int_0^{1/k} (\ln t)^n t^\alpha\,dt$ existiert und $\lim_{k\to\infty} i_k = 0$ erfüllt.
Hinweis: vollständige Induktion über n mittels partieller Integration.

b) Beweisen Sie, dass für alle $k,n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (-1,\infty)$, das uneigentliche Integral $I_k := \int_k^\infty (\ln t)^n t^\alpha e^{-t}\,dt$ existiert und $\lim_{k\to\infty} I_k = 0$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ eine Ungleichung der Form $(\ln t)^n t^\alpha e^{-t} \leq Ce^{-at}$ mit Konstanten $a, C > 0$ gilt.

c) Betrachten wir die Funktionenfolge $\Gamma_k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $\Gamma_k(x) := \displaystyle\int_{1/k}^k t^{x-1}e^{-t}\,dt$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass Γ_k für jedes k glatt ist, und n-te Ableitung $\Gamma_k^{(n)}(x) = \displaystyle\int_{1/k}^k (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ für $n \in \mathbb{N}$ hat.

d) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede kompakte Teilmenge $K \subset (0,\infty)$, die Funktionenfolge $\Gamma_k^{(n)}\big|_K : K \to \mathbb{R}$ bei $k \to \infty$ gleichmäßig konvergent ist, mit Grenzfunktion $F^n(x) := \displaystyle\int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Folgern Sie per Induktion über n, dass F^n die n-te Ableitung von Γ ist.