HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
L. Kotan, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis II*
SoSe 2019

Übungsblatt 2

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 25. April 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 2.1 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

d) $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x}\right)^{\exp(-1/x^2)}$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

Aufgabe 2.2 (3 + 3 Punkte)
Seien E, F und V normierte Vektorräume. Eine Abbildung $\mu : E \times F \to V$ heißt *bilinear*, falls für alle $x \in E$ und $y \in F$ die Abbildungen $\mu(x,\cdot) : F \to V$ und $\mu(\cdot, y) : E \to V$ linear sind.

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $\mu : E \times F \to V$ eine stetige bilineare Abbildung. Beweisen Sie die folgende verallgemeinerte Version der Produktregel: Gegeben zwei Funktionen $f : I \to E$ und $g : I \to F$, beide differenzierbar in $a \in I$, dann ist auch die Funktion
$$\mu(f,g) : I \to V : x \mapsto \mu(f(x), g(x))$$
differenzierbar in a, und
$$\frac{d}{dx}\mu(f,g)(a) = \mu(f'(a), g(a)) + \mu(f(a), g'(a)).$$
Warum ist es hier wichtig, dass μ stetig ist?[1]

b) Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum von reellen $n \times n$-Matrizen. Eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ kann wie folgt definiert werden: wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, und definieren $\|\mathbf{A}\|$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch
$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

[1]Falls die Vektorräume alle endlich-dimensional sind, dann ist jede bilineare Abbildung automatisch stetig, aber das stimmt bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht mehr.

Mit dieser Norm kann ohne großen Aufwand bewiesen werden, dass $\mathbb{R}^{n\times n}$ ein Banachraum ist, und dass die Menge invertierbarer Matrizen $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine offene Teilmenge davon ist. Außerdem gilt die Formel

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n.$$

Dies können Sie im Folgenden als gegeben ansehen.

Sei jetzt $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbf{A} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine differenzierbare Funktion mit Bild in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, so dass die Funktion

$$\mathbf{B} : I \to \mathbb{R}^{n\times n} : t \mapsto [\mathbf{A}(t)]^{-1}$$

auch differenzierbar ist.[2] Beweisen Sie die Formel

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}(t) = -\mathbf{B}(t)\left[\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\right]\mathbf{B}(t).$$

Bemerkung: Dies verallgemeinert die bekannte Formel $\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ *für eine reellwertige differenzierbare Funktion* f.

Insgesamt: **16 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 2.Z (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Reihe $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 2.A

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ auf $(-1,1)$ nicht gleichmäßig konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3 x)}{2^n}$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 2.B

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$ der durch die folgenden Reihen definierten Funktionen f bzw. g an und untersuchen Sie diese Funktionen auf Differenzierbarkeit:

a) $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

b) $g(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$.

[2]Später werden wir beweisen können, dass diese Annahme nicht nötig ist: die Differenzierbarkeit der Funktion $\mathbf{A}(t)$ impliziert automatisch, dass auch $\mathbf{B}(t)$ differenzierbar ist.