Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
L. Kotan, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 3

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 2. Mai 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 3.1 (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1)$ gilt: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Insbesondere gilt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2$.

Aufgabe 3.2 (5 Punkte)
Sei $f(x) = \cos(\sqrt{x})$, betrachtet als reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0, \infty)$. Beweisen Sie (mit möglichst wenig Rechnen!), dass f in 0 unendlich oft differenzierbar ist, und es gilt: $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!/(2n)!$.

Aufgabe 3.3 (3 Punkte)
Beweisen Sie das folgende Korollar des Satzes von Taylor: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in I$ $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, dann gilt[1]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O((x - x_0)^{n+1}).$$

Aufgabe 3.4 (3 + 1 + 1 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Form $f(x) = |x|^\alpha$, wobei $\alpha > 1$ eine reelle aber keine ganze Zahl ist. Sei $n \geq 0$ die grösste ganze Zahl mit der Eigenschaft, dass f im Punkt $x = 0$ n-mal differenzierbar ist. Sei $P_n(x)$ das n-te Taylorpolynom von f in 0 und $R_n(x)$ das entsprechende Restglied, d.h. $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

a) Bestimmen Sie n, P_n und R_n in Abhängigkeit von α.

b) Beweisen Sie direkt (ohne einen Satz aus der Vorlesung zu zitieren), dass $R_n(x) = o(x^n)$ gilt.

c) Gilt auch $R_n(x) = O(x^{n+1})$? *(Siehe Aufgabe 3.3.)*

Aufgabe 3.5 (4 + 2 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathcal{U} \subset I$ eine nichtleere offene Teilmenge. Beweisen Sie: Sind $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ zwei reell-analytische Funktionen, die auf $\mathcal{U}$ übereinstimmen, dann sind f und g identisch.
Hinweis: I ist zusammenhängend. Gegeben eine reell-analytische Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, betrachten Sie die Teilmenge $\{x \in I \mid f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 0\}$. Ist sie offen? Abgeschlossen?

[1] Die Notation $O(g(x))_{x \to x_0}$ wird oft als $O(g(x))$ abgekürzt, wenn der Entwicklungspunkt x_0 aus dem Kontext klar ist; ebenso $o(g(x))$.

b) Finden Sie zwei glatte Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $(-\infty, 0)$ übereinstimmen aber nicht identisch sind.
Hinweis: Siehe Aufgabe 1.4.

Insgesamt: **24 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 3.Z (3 + 1 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $k \geq 0$ eine ganze Zahl, und $C^k(K, \mathbb{R})$ der Vektorraum von k-fach stetig differenzierbaren Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$. Für jede $f \in C^k(K, \mathbb{R})$ und $n \in \{0, \dots, k\}$ gilt $f^{(n)} \in C^0(K, \mathbb{R}) := C(K, \mathbb{R})$, also kann eine Norm auf $C^k(K, \mathbb{R})$ durch

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{n=0}^{k} \|f^{(n)}\|_\infty$$

definiert werden, wobei $\|f\|_\infty := \max\big\{|f(x)| \;\big|\; x \in K\big\}$. Beweisen Sie:

a) Der normierte Vektorraum $(C^k(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^k})$ ist ein Banachraum für jedes $k \in \mathbb{N}$, d.h. er ist vollständig.[2]

b) Für jedes $k \geq 0$ und $n \in \{1, \dots, k\}$ ist die lineare Abbildung

$$\Big(C^k(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^k}\Big) \to \big(C^0(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^0}\big) : f \mapsto f^{(n)}$$

stetig.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 3.A

a) Finden Sie ein möglichst einfaches Polynom P mit $\cos(\sqrt{x}) = P(x) + O(x^3)_{x\to 0}$ für $x \geq 0$. *Hinweis: Suchen Sie zunächst ein Polynom Q mit* $\cos(y) = Q(y) + O(y^6)_{y\to 0}$.

b) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x_0) = 0$. Zeigen Sie

$$e^{f(x)+O(g(x))} = e^{f(x)} + O(g(x))_{x\to x_0}.$$

c) Verwenden Sie (a) und (b), um ein möglichst einfaches Polynom Q zu finden mit $e^{\cos(\sqrt{x})} = Q(x) + O(x^3)_{x\to 0}$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 3.B (Analyzitätskriterium)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie: Existiert zu jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset I$ eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $|f^{(n)}(x)| \leq C^{n+1} \cdot n!$, so ist f reell-analytisch.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\ln x$ und x^α für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Kriterium von (a) auf dem Intervall $I := (0, \infty)$ erfüllen.

[2] Der Fall $k = 0$ wurde schon letztes Semester bewiesen.