Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 7

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 6. Juni 2019

Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 7.1 (5 Punkte)
Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ die Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi - x\}$, und $f : A \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion $f(x,y) := \sin(x) + \sin(y) - \sin(x+y)$. Bestimmen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima der Funktion f. In welchen Punkten liegt ein globales Minumum bzw. globales Maximum vor?
Hinweis: Betrachten Sie zunächst f auf dem Inneren von A. (Auf dem Rand sind Extremwerte auch ohne kritische Punkte möglich!)

Aufgabe 7.2 (3 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$, $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathcal{U}$ eine beliebige glatte Funktion mit $\gamma(0) = \mathbf{a}$ und $\gamma'(0) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, und $g := f \circ \gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $\mathbf{a}$ ein kritischer Punkt von f, dann gilt

$$g'(0) = 0 \quad \text{und} \quad g''(0) = \langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{v} \rangle.$$

Hier bezeichnet $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $Hf(\mathbf{a})$ die Hesse-Matrix von f in $\mathbf{a}$. Insbesondere hängt $g''(0)$ nur von $\gamma(0)$ und $\gamma'(0)$ und sonst nicht vom Pfad γ ab.

Aufgabe 7.3 (4 + 4 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Ein kritischer Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ von f heißt *entartet*, wenn die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht invertierbar ist. Für einen gegebenen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ hinreichend klein betrachten wir nun die Funktion $g_{\mathbf{v}} : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$, definiert durch $g_{\mathbf{v}}(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.

a) Sei $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ ein kritischer Punkt von f, der nicht entartet ist. Beweisen Sie: f hat in $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum genau dann, wenn für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $g_{\mathbf{v}}(t)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum hat.
Hinweis: Was wissen Sie über die Eigenwerte von $Hf(\mathbf{a})$?

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) := y^2 - 3x^2y + 2x^4$ und sei $\mathbf{a} := (0,0)$. Zeigen Sie: Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ hat $g_{\mathbf{v}}(t)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum, aber f hat in $\mathbf{a}$ trotzdem kein lokales Minimum.
Hinweis: Suchen Sie nach einem glatten Pfad $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathcal{U}$ mit $\gamma(0) = \mathbf{a}$, so dass $f \circ \gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ kein lokales Minimum in $t = 0$ hat. (Was müsste $\gamma'(0)$ angesichts Aufgabe 7.2 sein?)

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)
Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := (x+y)^4 - 4xy$, und bestimmen Sie bei jedem kritischen Punkt, ob es sich um ein lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt[1] handelt.

[1] Ein *Sattelpunkt* ist per Definition ein kritischer Punkt, der weder lokales Maximum noch lokales Minimum ist.

Aufgabe 7.5 (5 Punkte)
Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ die Punkte $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ für $t \in [0,1]$ alle in $\mathcal{U}$ liegen. Sei eine konvexe Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Eine Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ heißt dann *konvex*, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, die Ungleichung

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) \qquad \text{für alle } t \in [0,1]$$

erfüllt wird. Beweisen Sie: eine C^2-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{x})$ positiv semidefinit für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ist.

Aufgabe 7.6 (4 Punkte)
Beweisen Sie: Ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ ein nichtentarteter (s. Aufgabe 7.3) kritischer Punkt einer Funktion $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, dann gibt es eine Umgebung von $\mathbf{a}$, in der f keine weiteren kritischen Punkte hat.
Hinweis: Die Hesse-Matrix $Hf : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Jacobi-Matrix des Gradienten $\nabla f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.

Insgesamt: **30 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 7.Z (4 + 3 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ mit $k \geq 1$ und $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$. Für $m \in \{0, \ldots, k\}$ werden wir mit $Q_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Polynom

$$Q_m(\mathbf{x}) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{a})}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha$$

bezeichnen. Das k-te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt $\mathbf{a}$ ist dann $P_k(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^k Q_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$. Dies ist (wie wir in der Vorlesung gesehen haben) das eindeutige Polynom von Grad $\leq k$, das die Relation

$$\partial^\alpha P_k(\mathbf{a}) = \partial^\alpha f(\mathbf{a}) \qquad \text{für alle} \qquad |\alpha| \leq k$$

erfüllt. Für einen gegebenen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ wählen wir auch $\epsilon > 0$ hinreichend klein und definieren die Funktion $g_\mathbf{v} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ durch $g_\mathbf{v}(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.

a) Beweisen Sie, dass $g_\mathbf{v}^{(m)}(0) = m! Q_m(\mathbf{v})$ für alle $m = 0, \ldots, k$ gilt.
Hinweis 1: Betrachten Sie die ähnliche (aber einfachere) Funktion $h_\mathbf{v}(t) := P_k(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$.
Hinweis 2: Q_m ist ein homogenes Polynom von Grad m, d.h. $Q_m(t\mathbf{x}) = t^m Q_m(\mathbf{x})$.

b) Unabhängig von Teil a), beweisen Sie durch direkte Anwendung der Kettenregel:

$$g_\mathbf{v}^{(m)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) v_{i_1} \ldots v_{i_m}, \qquad m = 0, \ldots, k.$$

Bemerkung: Durch das Verbinden der zwei Teile dieser Aufgabe mit Aufgabe 6.B(a) erhalten wir die Relation

$$Q_m(\mathbf{v}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{a})}{\alpha!} \mathbf{v}^\alpha = \frac{1}{m!} D^m f(\mathbf{a})(\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}).$$

Wer nichts gegen Kombinatorik hat, kann diese Relation mit Hilfe von Aufgabe 6.B(a) auch direkter beweisen, aber ich persönlich finde den hier skizzierten Beweis schöner. Die

Relation führt zu einer neuen Form der Taylorformel für Funktionen $f \in C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, nämlich

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} D^m f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}) + \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}),$$

wobei wie immer $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} + \theta\mathbf{h}$ für ein $\theta \in (0,1)$. In dieser Form kann die Formel sogar für Funktionen auf beliebigen Banachräumen verallgemeinert werden.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 7.A
Finden Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen und bestimmen Sie in jedem Fall, ob es sich um ein lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt handelt.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y) = x^2 + y^3$

c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x,y,z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$

Aufgabe 7.B
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) := (\cosh(x)\cos(y), \sinh(x)\sin(y))$.

a) Seien $\mathcal{U} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ und $\mathcal{U}_1 := \{(x,y) \in \mathcal{U} \mid 0 < y < 2\pi\}$. Bestimmen Sie die Mengen $\mathcal{V} := f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{V}_1 := f(\mathcal{U}_1) \subset \mathbb{R}^2$ (explizit).

b) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ kein C^1-Diffeomorphismus ist.

c) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ um jeden Punkt von $\mathcal{U}$ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist.

d) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 7.C
Wir betrachten die Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten, d.h. wir betrachten

$$\begin{aligned} F : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi) &\to \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R}), \\ F(r,\phi,\theta) &:= (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)). \end{aligned}$$

a) Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Koordinaten (r,ϕ,θ)

b) Zeigen Sie, dass F ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 7.D
Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\varphi(x,y) := (2e^x + x^3, x + y)$. Zeigen Sie, dass φ ein Diffeomorphismus ist, und berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung φ^{-1} im Punkt $(2,0)$.