HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 8

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 13. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 8.1 (5 Punkte)
Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Kugel mit Radius 1 um den Ursprung und $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}}.$$

Zeigen Sie, dass f ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 8.2 (3 + 5 Punkte)

a) Sei $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $g(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann durch die Gleichung

$$xg(x) - yg(-y) = 0$$

in einer offenen Kugel um $x = 0$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 0$ bestimmt wird. Berechnen Sie $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ im Punkt $x = 0$.
Hinweis: Die Funktion $f(x) := xg(x) - y(x)g(-y(x))$ hat $f'(0) = f''(0) = 0$. (Wieso?)

b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1^2 + y_2 = 0,$$
$$-8x_1 + x_3^2 + y_1 = 0$$

eine eindeutige Lösung $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^* := (1, 1, -3)$ hat, und dass die Lösungsmenge in einer Umgebung von $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ als $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}\}$ beschrieben werden kann, wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $\mathbf{x}^*$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion ist.

c) Für die Funktion f in Teilaufgabe c), berechnen Sie die Matrix der linearen Abbildung $Df(\mathbf{x}^*) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 8.3 (4 + 2 Punkte)
Seien $m \geq 0$, $n \geq m$ und $k \geq 1$ ganze Zahlen. Die folgenden Begriffe wurden in der Vorlesung definiert: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine C^k-**Untermannigfaltigkeit** von Dimension m in $\mathbb{R}^n$, falls zu jedem Punkt $p \in M$ offene Mengen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in \mathcal{U}$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ zugeordnet werden kann, so dass[1]

$$x \in M \cap \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Für eine gegebene C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $p \in M$ wird der **Tangentialraum** $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ als die Menge aller Vektoren $X \in \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft definiert: es existiert $\epsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$, und $\gamma(t) \in M$ für alle t.

[1] Hier bezeichnet $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ der Raum aller Vektoren der Form $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

a) Beweisen Sie: für jeden Punkt p in einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist T_pM ein m-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
Hinweis: Im Spezialfall $M = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gilt $T_pM = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ für alle p. Für den C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ in der Definition oben ist $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. (Warum?)

b) Früher im Semester wurde der Begriff *Tangentialraum* auch für beliebige Niveauflächen $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ definiert, die nicht unbedingt Untermannigfaltigkeiten sein müssen. Betrachten Sie insb. die Höhenlinie $M := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ für $f(x, y) := x^2 - y^2$, und beschreiben Sie die Menge $T_{(0,0)}M \subset \mathbb{R}^2$. Ist diese Menge ein linearer Unterraum?

Aufgabe 8.4 (*Der Rotationstorus*) (2 + 2 + 2 Punkte)
Für gegebene Konstanten $R > r > 0$ betrachten wir die Menge

$$\mathbb{T}^2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2 \right\}.$$

a) Skizzieren Sie $\mathbb{T}^2$.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{T}^2$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Finden Sie die Menge aller Punkte $p \in \mathbb{T}^2$ mit der Eigenschaft, dass der Tangentialraum $T_p\mathbb{T}^2$ die xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist.

Insgesamt: **25 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 8.Z (4 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Funktion $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ heißt **C^k-Immersion**, falls für jedes $x \in \mathcal{U}$, $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Beweisen Sie, dass alle Immersionen $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ "lokal injektiv" sind, d.h. jedes $x \in \mathcal{U}$ hat eine Umgebung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, so dass $f|_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist.
Hinweis: Dies folgt direkt vom Umkehrsatz im Fall $m = n$. Im Fall, $n > m$, basteln Sie aus f eine neue Funktion, für die der Umkehrsatz im Punkt $x \in \mathcal{U}$ gilt.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 8.A

a) Zeigen Sie, dass man die Lösungsmenge der Gleichung $ye^{xy} - 1 = 0$ in einer Umgebung des Punktes $p = (0, 1)$ als Graph einer glatten Funktion $y = \varphi(x)$ mit $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $\varphi(0) = 1$ beschreiben kann.

b) Zeigen Sie: das 2. Taylorpolynom der Funktion φ von Teilaufgabe a) um den Entwicklungspunkt $x = 0$ ist $1 - x + \frac{3}{2}x^2$.

Aufgabe 8.B
Wir betrachten die Gleichung $f(x, y, z) := y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$. Der Punkt $(0, e, 2)$ liegt offensichtlich in der Lösungsmenge der Gleichung.

a) Zeigen Sie, dass man die Gleichung in einer Umgebung von $(0, e, 2)$ nach der z-Variablen auflösen kann.

b) Zeigen Sie $z = h(x, y)$ eine solche Auflösung. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x h(0, e)$ und $\partial_y h(0, e)$.