Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis II*

SoSe 2019

Der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen

Das folgende Theorem impliziert Satz 5.13 im Skript von Helga Baum, aber leider hatte der alternative Beweis, den ich in der Vorlesung ausgeführt habe, ein paar Lücken, die aus einem leichtfertigen Umgang mit dem Supremum und Infimum entstanden sind. Ich möchte hier eine korrigierte Version dieses Beweises präsentieren.

Satz 1. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to E$ eine stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion, und $c > 0$ eine Konstante mit*

$$\|f'(x)\| < c \quad \text{für alle} \quad x \in (a, b).$$

Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| < c(b - a). \tag{1}$$

Hier noch zur Erinnerung, wieso diese Aussage als "Mittelwertsatz" interpretiert werden kann. Gegeben eine stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to E$, sei $c := \|f(b) - f(a)\|/(b - a)$. Falls $c = 0$, dann folgt $\|f'(x)\| \geq c$ trivial für alle $x \in (a, b)$. Falls $c > 0$ aber $\|f'(x)\| < c$ für alle $x \in (a, b)$, dann impliziert Satz 1

$$\frac{\|f(b) - f(a)\|}{b - a} < c = \frac{\|f(b) - f(a)\|}{b - a},$$

ein Widerspruch. Folgerung: es existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$\|f'(\xi)\| \geq \frac{\|f(b) - f(a)\|}{b - a},$$

also Formell sieht diese Aussage ein bisschen so aus wie der Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Die wichtigste Konsequenz dieses Satzes ist für uns das Folgende:

Korollar 1. *Gegeben ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein normierter Vektorraum E, jede differenzierbare Funktion $f : I \to E$ mit beschränkter Ableitung ist lipschitzstetig.* □

Unser Beweis von Satz 1 basiert auf einer lokalen Version der Ungleichung (1), die direkt durch die Charakterisierung von Differenzierbarkeit mittels linearer Approximation entsteht. Sei $f : [a, b] \to E$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gegeben $t \in (a, b)$, haben wir dann die Approximationsformel

$$f(t + h) - f(t) = hf'(t) + |h|R(h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ ausreichend nahe an 0, wobei $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$. Wegen der Dreiecksungleichung folgt

$$\|f(t + h) - f(t)\| \leq |h| \cdot \left(\|f'(t)\| + \|R(h)\|\right).$$

Gegeben $c > 0$ mit $\|f'(t)\| < c$, können wir wegen $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$ annehmen, dass $\|f'(t)\| + \|R(h)\| < c$ auch gilt, wenn $|h|$ ausreichend klein ist. Dies beweist:

Lemma 1. *Gegeben die Annahmen in Satz 1, gibt es für jede $t \in (a, b)$ eine $\delta_t > 0$, so dass*

$$\|f(x) - f(t)\| < c|x - t|$$

für alle $x \in (t - \delta_t, t + \delta_t)$ gilt. □

Um aus diesem “lokalen” Lemma ein “globales” Resultat zu folgern, betrachten wir nun Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

- $a < \ldots < x_{-k} < x_{-k+1} < \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < b$;
- Für jede $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < c(x_{k+1} - x_k)$.

Lemma 1 impliziert, dass es gute Folgen gibt: und zwar kann man $x_0 \in (a, b)$ beliebig wählen, dann $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$ and $x_{-1} \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0)$, $x_2 \in (x_1, x_1 + \delta_{x_1})$ und $x_{-2} \in (x_{-1} - \delta_{x_{-1}}, x_{-1})$ und so weiter. Eigentlich sollte $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ als Zusammensetzung von den zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ verstanden werden, wobei beide dieser Folgen monoton und beschränkt sind und deswegen wohldefinierte Grenzwerte haben:

$$a \le \lim_{n\to-\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} x_n \le b.$$

Der wichtigste Schritt im Beweis von Satz 1 ist nun das folgende Lemma:

Lemma 2. *Es gibt eine gute Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *mit* $\lim_{n\to-\infty} x_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

Bemerkung 1. An dieser Stelle in der Vorlesung war die Zeit sehr knapp, und ich habe einiges gesagt, was ich später als fraglich erkennen musste. Meine Idee war, Lemma 2 zu beweisen, indem ich die zwei Zahlen

$$\alpha := \inf\left\{ \lim_{x\to-\infty} x_n \;\middle|\; (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ eine gute Folge} \right\}$$
$$\beta := \sup\left\{ \lim_{x\to\infty} x_n \;\middle|\; (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ eine gute Folge} \right\}$$

betrachte und beweise, dass $\alpha = a$ und $\beta = b$. Mein Argument dafür war nicht ganz vollständig, aber selbst dann hätte dies nicht gereicht, um Lemma 2 zu beweisen, sondern nur dass es eine *Folge von guten Folgen* $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}^{k\in\mathbb{N}}$ gibt, mit den Eigenschaften

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to-\infty} x_n^{(k)}\right) = a \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)}\right).$$

Aus dieser Folge von Folgen ist es nicht besonders einfach, eine einzelne Folge mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. Lemma 3 unten liefert uns eine alternative Herangehensweise, die diese Schwierigkeit umgeht.

Als Vorbereitung für den Beweis von Lemma 2 brauchen wir nun:

Lemma 3. *Gegeben* $\alpha, \beta \in (a, b)$ *mit* $\alpha < \beta$, *gibt es Zahlen* $N \in \mathbb{N}$ *und* $x_0, \ldots, x_N \in (a, b)$ *mit*

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = \beta$$

und

$$\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < c(x_{k+1} - x_k) \quad \textit{für alle} \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Beweis. Die Intervalle $I_t := (t - \delta_t, t + \delta_t)$ für $t \in [\alpha, \beta]$ bilden eine offene Überdeckung von $[\alpha, \beta]$. Da $[\alpha, \beta]$ kompakt ist,[1] gibt es davon eine endliche Teilüberdeckung, also endlich viele Zahlen

$$\alpha \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m \le \beta,$$

[1] Genau hier benutzen wir die wesentliche Tatsache, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist, denn z.B. würden wir versuchen, einen ähnlichen Satz für Funktionen $f : \{x \in \mathbb{Q} \mid a \le x \le b\} \to E$ zu beweisen, dann hätten wir jetzt das riesige Problem, dass $\{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha \le x \le \beta\}$ keine kompakte Menge ist. Die Kompaktheit fehlt, weil $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist, also hat $\{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha \le x \le \beta\}$ viele nichtkonvergente Cauchy-Folgen, da dann auch keine konvergente Teilfolgen haben können.

so dass $\bigcup_{j=0}^{m} I_{t_j} \supset [\alpha, \beta]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir durch die mögliche Entfernung von einigen Punkten in der Liste $t_0, \ldots, t_m$ annehmen, dass keines der Intervalle I_{t_j} völlig enthalten ist in einem Anderen, I_{t_k}. Unter dieser Annahme folgt, dass für jede $j = 0, \ldots, m-1$,

$$I_{t_j} \cap I_{t_{j+1}} \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha < t_0$ und $t_m < \beta$, kann jetzt die Liste $x_0, \ldots, x_N$ in der Form

$$\alpha, t_0, t_{01}, t_1, t_{12}, t_2, \ldots, t_{m-1}, t_{m-1,m}, t_m, \beta$$

definiert werden, wobei für jede $j = 0, \ldots, m-1$ wir eine beliebige Zahl $t_{j,j+1} \in I_j \cap I_{j+1}$ zwischen t_j und t_{j+1} wählen. Falls $\alpha = t_0$ oder $t_m = \beta$ kann diese Liste einfach durch die Entfernung von α am Anfang bzw. β am Ende geändert werden. Die wesentliche Eigenschaft $\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < c(x_{k+1} - x_k)$ wird als Konsequenz von Lemma 1 erfüllt. $\square$

Beweis von Lemma 2. Wir wählen zuerst eine beliebige Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit

$$a < \ldots < y_{-k} < y_{-k+1} < \ldots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < b$$

und $\lim_{n\to-\infty} y_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Mit Hilfe von Lemma 3 kann jetzt für jede $n \in \mathbb{Z}$ endlich viele neue Terme zwischen y_n und y_{n+1} in diese Folge eingefügt werden, um eine neue Folge zu konstruieren, die auch die zweite Eigenschaft einer guten Folge erfüllt. $\square$

Beweis von Satz 1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die gute Folge von Lemma 2, also haben wir für jede $n \in \mathbb{Z}$

$$\epsilon_n := c(x_{n+1} - x_n) - \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| > 0.$$

Dann gilt für jede $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|f(x_n) - f(x_{-n})\| &= \left\| \sum_{k=-n}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) \right\| \le \sum_{k=-n}^{n-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \\ &= \sum_{k=-n}^{n-1} [c(x_{k+1} - x_k) - \epsilon_k] = c(x_n - x_{-n}) - \sum_{k=-n}^{n-1} \epsilon_k. \end{aligned}$$

Da f auf $[a, b]$ stetig ist und $\lim_{n\to-\infty} x_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, konvergiert die linke Seite dieser Ungleichung gegen $\|f(b) - f(a)\|$ bei $n \to \infty$, während die rechte Seite gegen $c(b-a) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon_k$. Über diese unendliche Reihe brauchen wir nichts weiteres zu wissen, als dass jede ϵ_k positiv ist. Das Ergebnis ist also

$$\|f(b) - f(a)\| \le c(b-a) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon_k < c(b-a).$$

$\square$