Probeklausur zur Vorlesung Analysis 2*

Sommersemester 2019 Prof. Chris Wendl

Nachname, Vorname:	
Matrikelnummer:	

- Bearbeitungszeit: 2 Stunden, 45 Minuten.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt Ihren Nach- und Vornamen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Beschriften Sie diese jeweils auch mit Ihrem Nach- und Vornamen, Ihrer Matrikelnummer und zusätzlich mit der jeweiligen Aufgabennummer. (Sie können damit schon vor der Klausur beginnen.)
- Ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt mit Notizen ist zugelassen. Weitere Hilfsmittel sowie elektronische Geräte sind *nicht zugelassen*. Handys müssen ausgeschaltet sein.
- Sie dürfen Aussagen von Teilaufgaben verwenden, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.
- Sie dürfen Ihnen bekannte Aussagen aus Vorlesung oder Übung verwenden, es sei denn, die Aufgabe besteht darin, diese Aussage selbst oder einen Spezialfall davon zu beweisen.
- Begründen Sie Ihre Antworten. Schreiben Sie an jeden Beweisschritt die benötigten Aussagen (Definitionen, Sätze). Begründen Sie gegebenenfalls, dass die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.
- Das Anführen überflüssiger, beispielsweise redundanter, Argumente oder die Beantwortung nicht gestellter Fragen kann zu Punktabzug führen, falls diese mathematisch inkorrekt sind.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur.

Aufgabe	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	Σ
maximale Punktezahl	*9*	*9*	*9*	*8*	*10*	*14*	*11*	*70*
erreichte Punktezahl								

Bewertung:	
Berlin, den	

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck

Analysis II*

SoSe 2019

Probeklausur

Anmerkung: *Die echte Klausur wird so gestaltet, dass die Aufgaben innerhalb von 2 Stunden machbar sein sollten, aber bei dieser Probeklausur wurde nicht darauf geachtet, d.h. der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben soll mit einer echten Klausur vergleichbar sein, aber es gibt insgesamt mehr davon. Seien Sie also nicht besorgt, wenn Sie die Probeklausur in 2 Stunden nicht schaffen.*

Aufgabe 1 (2 + 3 + 2 + 2 Punkte)

a) Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Was ist der maximale Bereich, auf dem die Reihe konvergieren könnte? Wo ist f garantiert differenzierbar?

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}(x+3)^n$ konvergiert.

c) Auf welchem Bereich ist die Funktion g aus b) stetig?

d) Auf welchem Bereich ist die Funktion g aus b) differenzierbar, und was ist $g'(x)$?

Aufgabe 2 (2 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Was bedeutet es, wenn f im Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ differenzierbar ist?

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und die Hesse-Matrix von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := (3x + y)^2 + \sin(yz)$.

c) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine n-mal-n Matrix und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, und bezeichne mit $\langle \ , \ \rangle$ das euklidische Skalarproduct auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \rangle$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie das Differential $Dg(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 4 Punkte)

a) Gegeben sei eine stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ein Punkt $q \in \mathbb{R}^m$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$. Unter welchen Bedingungen ist garantiert, dass $M_q := f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist? Was ist in diesem Fall die Dimension von M_q?

b) Zeigen Sie, dass der Ellipsoid $E := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 8/15\right\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Bestimmen Sie für die Einschränkung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := x^2 + y + z$ auf E die globalen Extrempunkte (d.h. Maximum und Minimum) auf E.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 4 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was bedeutet es, wenn f reell-analytisch ist?

b) Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \sqrt{1+x}$. Zeigen Sie per Induktion, dass die n-te Ableitung von f für $x > 0$ die folgende Form hat:

$$f^{(n)}(x) = A_n (1+x)^{\frac{1}{2}-n}, \qquad \text{mit} \qquad A_n \in \mathbb{R},$$

wobei die Koeffizienten A_n eine Rekursion der Form $A_{n+1} = b_n A_n$ erfüllen. Geben Sie A_1 und alle $b_n \in \mathbb{R}$ explizit an.

c) Geben Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ an (dabei darf A_n verwendet werden), und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

Aufgabe 5 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ eine 2-fach stetig differenzierbare Funktion und $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ ein Punkt. Welche Form hat das zweite Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt $\mathbf{a}$? Verwenden Sie wenn möglich den Gradienten $\nabla f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$ und die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Ihrer Antwort.

b) Welche Relation zwischen f und dem ersten Taylorpolynom von f um $\mathbf{a}$ folgt aus dem Satz von Taylor? (Sie dürfen Ihre Lieblingsform für das Restglied frei auswählen.)

c) Beweisen Sie: falls n gerade ist, f einen kritischen Punkt in $\mathbf{a}$ hat und die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{a})$ eine negative Determinante hat, dann nimmt f weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum in $\mathbf{a}$ an.

Aufgabe 6 (2 + 3 + 2 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Definieren Sie, was es heißt, dass f Riemann-integrierbar ist.

b) Beweisen Sie: Hat $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ den Wert $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele Punkte $x \in [a, b]$, dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

c) Gegeben eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung über f?

d) Berechnen Sie mit Substitution und partieller Integration $\displaystyle\int \sin\left(\sqrt{x} + 1\right)\, dx$.

e) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) := \displaystyle\int_0^x \cos\left(\sqrt{t} + x\right)\, dt$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(1)$.

Aufgabe 7 (2 + 4 + 2 + 3)

a) Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $-\infty \le a < b \le \infty$. Definieren Sie, was es heißt, dass eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

b) Bestimmen Sie, ob die uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ konvergieren.

c) Was heißt es, dass ein uneigentliches Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ absolut konvergiert?

d) Finden Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, sodass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\, dx$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. (Hier sollten Sie es plausibel machen, dass das Integral nicht absolut konvergiert, müssen es aber nicht komplett beweisen.)