

Inhaltsbeschreibung

Allgemeine Informationen

- Lehrperson:** Prof. Chris Wendl
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
wendl@math.hu-berlin.de
Sprechstunde: Dienstags 15:00–16:00
- Website:** <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2016/DiffGeo1/>
- Vorlesung:** Dienstags 9:00–11:00 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)
Donnerstags 15:00–17:00 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)
- Übung:** Dienstags 11:00–13:00 in 1.012 (Rudower Chaussee 25)
- Sprache:** Nach Wunsch der Hörer kann die Vorlesung auf Deutsch oder auf Englisch gehalten werden. Wer die Vorlesung besuchen will und eine eindeutige Präferenz hat, kann mich gern im Voraus kontaktieren.
- Voraussetzungen:** Inhalte der Module *Analysis I* und *II*, und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I* und *II*
Die wichtigsten Voraussetzungen sind gute Kenntnisse der Differentialrechnung für Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m , inklusive der Sätze über die Umkehrfunktion und implizite Funktionen, und des Transformationssatzes für Integration in n Variablen.

Kurze Beschreibung

Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten: Definition von glatten n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder, Flüsse und die Lieklammer, Differentialformen, Integration, der Satz von Stokes. Grundlegendes zu Liegruppen, Liealgebren, und Exponentialabbildung. Zusammenhänge und Krümmung auf Faserbündeln und Vektorbündeln, Distributionen, Integrierbarkeit und der Satz von Frobenius. Grundsätze der Riemannschen Geometrie: Krümmungstensoren, Geodäten, der Satz von Gauß-Bonnet für Flächen.

Ausführliche Beschreibung

Die Differentialgeometrie beginnt mit dem Betrachten von 1-dimensionalen Kurven und 2-dimensionalen Flächen. Diese dienen als Spezialfälle zur Illustration des viel allgemeineren Begriffs einer glatten n -dimensionalen *Mannigfaltigkeit*. Mannigfaltigkeiten kommen auf natürlicher Weise in vielen Bereichen der Mathematik sowie der Physik vor, z.B. als Konfigurationsräume für eingeschränkte dynamische Systeme, oder als die gekrümmte Raumzeit in der Einstein'schen Gravitationstheorie (allgemeine Relativitätstheorie). In dieser Vorlesung werden nicht nur Kurven und Flächen sondern auch allgemeine Mannigfaltigkeiten in einem ziemlich breiten Überblick betrachtet, wobei wir uns bei der Visualisierung meistens auf 2-dimensionalen Beispielen konzentrieren werden. Erstes Ziel ist es, die Grundbegriffe der Glattheit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu verstehen, sowie Ableitungen solcher Abbildungen, Tangentialvektoren, Vektorfelder und die dadurch erzeugten Flüsse. Tensoren werden dann als linear-algebraisches Werkzeug eingeführt, um lokale geometrische Informationen auszudrücken. Als Spezialfall betrachten wir Differentialformen, die einen

Begriff von Volumen auf Mannigfaltigkeiten definieren und daher integriert werden können. Als Abschluss des ersten Teils der Vorlesung beweisen wir den Satz von Stokes über Integration von Differentialformen; als natürliche n -dimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, impliziert er auch diverse bekannte Resultate in der 2- und 3-dimensionalen Vektoranalysis wie den Divergenzsatz und den Rotationssatz.

Es folgt ein Einschub zu den Liegruppen, d.h. Gruppen, die auch glatte Mannigfaltigkeiten sind, wobei die wesentlichsten Beispiele die schon bekannten Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ sind. Man könnte ein ganzes Semester lang die Eigenschaften von Liegruppen diskutieren—was wir nicht tun werden, allerdings benötigen wir einige Grundbegriffe aus der Theorie, um uns eine elegante Herangehensweise zur Differentialgeometrie zu ermöglichen.

Die zweite Hälfte der Vorlesung befasst sich mit Vektorbündeln und Faserbündeln im Allgemeinen, von denen mehrere Beispiele (z.B. die Menge aller Tangentialvektoren auf einer Mannigfaltigkeit) dann aus der ersten Hälfte schon bekannt sein werden. Der Wunsch nach einer Definition von Ableitungen auf Vektorbündeln führt auf natürlicher Weise zu den Definitionen von Paralleltransport, Zusammenhängen und kovarianter Differentiation. Hieraus gelangt man auf natürliche Art zu der Frage, wann kovariante Ableitungen in verschiedenen Richtungen kommutieren. Die Antwort darauf verlangt die Einführung der *Krümmung*, eines Tensors, dessen Verschwinden die Existenz von “kovariant konstanten” Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten charakterisiert. Zu diesem Beweis gelangt man über die Betrachtung glatter Distributionen und den Integrierbarkeitssatz von Frobenius. Die überzeugendsten ersten Anwendungen dieser Ideen sind dann in der *Riemannschen Geometrie*: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine mit extra Struktur versehene Mannigfaltigkeit, die die Definition der Längen von Kurven und Schnittwinkel ermöglicht. Wir betrachten *Geodäten*, die kürzesten Wege zwischen nahliegenden Punkten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, und wir diskutieren die geometrische Bedeutung des Riemannschen Krümmungstensors in n Dimensionen, sowie seine einfachere Variante auf Flächen, die sogenannte “gaußsche” Krümmung. Danach können wir eins der schönsten und grundlegendsten Resultate über 2-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beweisen: den Satz von Gauß-Bonnet, der eine Beziehung zwischen der Summe der Winkel in einem geodätischen Dreieck und der dadurch umrandeten Krümmung festlegt, oder im Fall von kompakten Flächen ohne Rand, eine Relation zwischen der totalen Krümmung und einer rein topologischen Invariante, der Euler-Charakteristik.

Falls es die Zeit erlaubt gibt es mehrere Möglichkeiten für zusätzliche Themen, die wir noch diskutieren könnten, die meisten davon mit Bezug auf die Physik, u.A. die Hamiltonische Dynamik und symplektische Geometrie, pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und allgemeine Relativitätstheorie, holomorphe Vektorbündel, Hauptfaserbündel und Eichtheorie.

Literatur

Die erste Hälfte der Vorlesung hält sich nicht strikt an eines der aufgeführten Werke, aber auf der folgenden Liste sind einige empfohlene Bücher, die sehr viel von dem, was wir in der ersten Hälfte diskutieren werden (und vieles dazu, was in der Vorlesung nicht vorkommen wird), abdecken. Genauere Empfehlungen zum Lesen in den ersten zwei Büchern auf dieser Liste werde ich regelmässig bekanntgeben.

- Ilka Agricola und Thomas Friedrich, *Globale Analysis: Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik*, Vieweg 2001 (oder die Englische Übersetzung, AMS 2002)
(mehrere Exemplare verfügbar in der Universitätsbibliothek der HU, Lehrbuchsammlung und Freihandbestand)
- John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer GTM 2003
(Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU—die Bibliothek hat auch eine neuere Ausgabe von 2013, allerdings ohne Online-Zugang)
- Helga Baum, *Eine Einführung in die Differentialgeometrie*, Vorlesungsskript verfügbar unter <https://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/diffgeo1.pdf>

- Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer GTM 1983 (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I*, 3rd edition with corrections, Publish or Perish 2005

Bemerkung: einige Abschnitte der Bücher von Lee und Warner setzen deutlich tiefergehende topologische Vorkenntnisse voraus als wir in der Vorlesung annehmen wollen, aber Studierende, die Topologie I noch nicht gehört haben, können diese Abschnitte überspringen ohne den Faden zu verlieren.

Die zweite Hälfte der Vorlesung wird hauptsächlich von meinem eigenen Skript begleitet:

- Chris Wendl, *Lecture Notes on Bundles and Connections*

das auf der Website rechtzeitig zur Verfügung gestellt wird. Eine ältere Version dieses Skripts (geschrieben für eine Vorlesung im Frühlingsemester 2007 am MIT) ist verfügbar unter <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/connections.html>. Noch ein gutes Buch, das sich stärker auf Faserbündeln und Zusammenhängen konzentriert (aber ohne die Anwendung in der Riemannschen Geometrie, die wir diskutieren werden) ist:

- Helga Baum, *Eichfeldtheorie*, Springer 2009 (oder die zweite Ausgabe 2014)

Zum Schluß hier noch eine kurze Auswahl an kostenlos downloadbaren Vorlesungsskripten von anderen Autoren. Sie behandeln die Mehrheit der für uns relevanten Themen und sind von Kollegen empfohlen worden:

- Nigel Hitchin, *Differentiable Manifolds*, verfügbar unter <https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinotes/manifolds2012.pdf>
- Thomas Schick, *Kurz-Skript zu "Topologie und Differentialgeometrie 1"*, verfügbar unter <http://www.uni-math.gwdg.de/schick/teach/diffgeo.pdf>
- Sean Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, verfügbar unter <https://www.preposterousuniverse.com/grnotes/> (Kapitel 2 und 3 geben eine äußerst lesbare Einführung in die Begriffe von Mannigfaltigkeiten und Krümmung, die geeignet ist für sowohl Mathematiker als auch Physiker)

Klausur und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine dreistündige **schriftliche Klausur** in der Woche nach Semesterende (mit Nachholtermin in der Woche vor dem Sommersemester) bestimmt. Bücher und Notizen dürfen in der Klausur benutzt werden.

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte "**take-home midterm**". Diese hat die Form eines Übungsblatts, das unter besonderen Bedingungen bearbeitet wird: Lösungen müssen innerhalb von zwei Wochen **ohne Zusammenarbeit** erarbeitet und eingereicht werden. Diese Hausarbeit wird korrigiert und benotet, und je nach erreichter Punktzahl kann die Klausurnote verbessert werden:

- 50%–75% = Verbesserung um 0,3
- 75%–100% = Verbesserung um 0,7

Übungsblätter werden wöchentlich Dienstags ausgehändigt und werden in der Übung am folgenden Dienstag besprochen. Man sollte bereit sein, bei jeder Übung die eigene Lösung für mindestens eine der Übungsaufgaben zu präsentieren.

Wochenplan

Der folgende Zeitplan ist provisorisch.

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Satz über implizite Funktionen, Beispiele, Tangentialvektoren.
2. Tangentialabbildungen, Vektorfelder, Lieklammer und kommutierende Flüsse.
3. Orientierbarkeit, Tensoren, Indexnotation, Differentialformen.
4. Das Lemma von Poincaré, Lie-Ableitung, Cartansche Formel.
5. Integration, der Satz von Stokes, niedrig-dimensionale Beispiele.
6. Liegruppen und Liealgebren, Exponentialabbildung.
7. Vektorbündel und Schnitte, Bündelmetriken, Orientierung.
8. Strukturgruppen, Faserbündel, Paralleltransport.
9. Lineare Zusammenhänge, kovariante Ableitungen, Kompatibilität.
10. Zusammenhänge auf Tangentialbündeln, Torsion und Symmetrie, Riemannsche Normalkoordinaten.
11. Levi-Civita-Zusammenhang, Geodäten, Riemannsche Mannigfaltigkeiten.
12. Integrierbarkeit und der Satz von Frobenius, Krümmung.
13. Lokal flache Mannigfaltigkeiten, zweite Fundamentalform und gaußsche Krümmung.
14. Euler-Charakteristik und der Satz von Gauß-Bonnet für Flächen.
15. Schnittkrümmung, zweite Variationsformel, längenminimierende Geodäten.
16. (weitere Themen, falls Zeit übrig bleibt)