Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 1

Schriftliche Abgabe: Dienstag 22. Oktober 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 1.1 (3 + 3 + 3 + 3 Punkte)
Wenden Sie die Methode der Trennung der Variablen an, um Lösungen $x : I \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertprobleme zu finden. Finden Sie in jedem Fall das maximale offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$, auf dem Ihre Lösung definiert ist.

a) $\dot{x} = -\dfrac{t^2}{x^3}, \qquad x(0) = 1$ bzw. $x(0) = -1$.

b) $\dot{x} = -\dfrac{2\tan x}{t}, \qquad x(1) = \pi/4$.

c) $\dot{x} = -\dfrac{4t}{1+t^2}x, \qquad x(-1) = 1$.

d) $\dot{x} = t(x + x^2), \qquad x(0) = 1$.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
In der Vorlesung am Donnerstag (17.10.2019) wurde bewiesen, dass für eine gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die Matrixwertige Funktion $\mathbf{\Phi}(t) := e^{t\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Differentialgleichung[1]

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$$

erfüllt. Beweisen Sie: Für gegebene Konstanten $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ und ein gegebenes offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ existiert *genau eine* Lösung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{C}^n$ zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \text{ für alle } t \in I, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Benutzen Sie das Matrixexponential, um eine Formel für diese Lösung hinzuschreiben.
Hinweis: Gegeben eine beliebige Lösung $\mathbf{y} : I \to \mathbb{C}^n$ zum obigen Anfangswertproblem, betrachten Sie die Funktion $\mathbf{z}(t) := e^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t)$.

Aufgabe 1.3 (*Schwingungsgleichung*) (2 + 2 + 3 + 3 + 4 Punkte)
Die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreibt die Bewegung eines Federpendels: wir suchen nach zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die

$$\ddot{x}(t) = -kx(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

erfüllen, wobei $k > 0$ eine gegebene Konstante ist.

a) Finden Sie eine reelle 2-mal-2-Matrix $\mathbf{A}$ mit der Eigenschaft, dass $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung (1) genau dann erfüllt, wenn die vektorwertige Funktion $\mathbf{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ gegeben durch $\mathbf{v}(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ die Gleichung

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) \tag{2}$$

erfüllt.

[1] Das Matrixexponential wird definiert durch $e^{\mathbf{A}} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\mathbf{A}^m$.

b) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ in Teilaufgabe (a).
Hinweis: Die Eigenwerte sind imaginär, also sind die Eigenvektoren nicht reell.

c) Bezeichnen wir die zwei Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{v}_\pm \in \mathbb{C}^2$ und die entsprechenden Eigenwerte mit $\lambda_\pm$, so gilt $\mathbf{A}\mathbf{v}_\pm = \lambda_\pm \mathbf{v}_\pm$. Für beliebige Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$ ist dann

$$\mathbf{v}(t) = a e^{\lambda_+ t} \mathbf{v}_+ + b e^{\lambda_- t} \mathbf{v}_-$$

eine Lösung der Gleichung (2). Finden Sie für gegebene Konstanten $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ Lösungen $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zur Gleichung (1), die die Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} y(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t_0) = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} z(t_0) = 0, \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

erfüllen.
Achtung: $y(t)$ und $z(t)$ müssen reellwertige (nicht nur komplexwertige) Funktionen sein, obwohl $\mathbf{v}(t)$ im Allgemeinen Werte in $\mathbb{C}^2$ (nicht $\mathbb{R}^2$) hat.

d) Finden Sie für gegebene Konstanten $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zur Gleichung (1), die die Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

erfüllt, und erklären Sie mit Hilfe von Aufgabe 1.2, warum es keine andere Lösung mit den selben Anfangsbedingungen geben kann.

e) Als alternative Herangehensweise zur Lösung der Gleichungen (1) bzw. (2) kann man auch das Matrixexponential $e^{t\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ explizit hinschreiben. Dies ist möglich, weil die Matrix $\mathbf{A}$ die Relation

$$\mathbf{A}^2 = -k\mathbb{1}$$

erfüllt, wobei wir die 2-mal-2 Einheitsmatrix mit $\mathbb{1}$ bezeichnen. Benutzen Sie diese Relation, um einfache Formeln für $\mathbf{A}^{2m}$ und $\mathbf{A}^{2m+1}$ für jedes $m \geq 0$ hinzuschreiben, und leiten Sie daraus eine Formel für $e^{t\mathbf{A}}$ her, in der die Funktionen $\cos(\sqrt{k}t)$ und $\sin(\sqrt{k}t)$ aber keine unendlichen Reihen vorkommen.
Hinweis: Betrachten Sie getrennt die geraden und ungeraden Glieder in der Reihendarstellung von $e^{t\mathbf{A}}$. Ob Ihre Formel richtig ist, sollten Sie anhand der Antwort auf Teilaufgabe (d) (siehe auch Aufgabe 1.2) nachprüfen können.

Insgesamt: **30 Punkte**