HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 12: Musterlösung zu den Aufgaben 12.1, 12.2, 12.4, 12.A und 12.D

Aufgabe 12.1 (2 + 2 + 3 + 3 + 2 Punkte)
Sei $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel und $\alpha \in (0, \infty)$ eine Konstante. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben fast überall durch $f(\mathbf{x}) := \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$.

a) Für welche $\alpha \in (0, \infty)$ und $p \in [1, \infty]$ gehört $f|_{\mathbb{D}^n}$ zu $L^p(\mathbb{D}^n)$?

Lösung:
Die Funktion ist freilich nicht fast überall beschränkt in $\mathbb{D}^n$, gehört also nicht zu $L^\infty(\mathbb{D}^n)$. Für den Fall $1 \le p < \infty$ verwenden wir die n-dimensionalen Polarkoordinaten $(r, \theta, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})$ aus Aufgabe 11.A. In diesen Koordinaten hat f die Form $f(r, \theta, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) = 1/r^\alpha$, und die Einheitskugel $\mathbb{D}^n$ ist durch $\{r < 1\}$ beschrieben. Durch Anwenden der Transformationsformel wie in Aufgabe 11.A(b) finden wir also eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\int_{\mathbb{D}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, dx_1 \dots dx_n = C \int_0^1 r^{n-1} \frac{1}{r^{\alpha p}} \, dr = C \int_0^1 r^{n-1-\alpha p} \, dr = \frac{C}{n - \alpha p} r^{n-\alpha p} \Big|_0^1,$$

wobei wir im letzten Schritt $n - \alpha p \neq 0$ angenommen haben. Unter dieser Annahme ist das Integral genau dann endlich, wenn $n - \alpha p > 0$, und im Fall $n - \alpha p = 0$ folgt stattdessen

$$\int_{\mathbb{D}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, dx_1 \dots dx_n = C \int_0^1 \frac{dr}{r} = \ln r \Big|_0^1 = \infty.$$

Schlussfolgerung: die Funktion $1/\|\mathbf{x}\|^\alpha$ gehört genau dann zu $L^p(\mathbb{D}^n)$, wenn

$$p < \frac{n}{\alpha}.$$

b) Für welche $\alpha \in (0, \infty)$ und $p \in [1, \infty]$ gehört $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n}$ zu $L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)$?

Hinweis: siehe Aufgabe 11.A(b).
Lösung:
Auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ ist f beschränkt, gehört also zu $L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)$. Für $1 \le p < \infty$ verwenden wir wieder Polarkoordinaten wie in Teilaufgabe (a), aber diesmal ist der Integrationsbereich $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ durch $\{r \ge 1\}$ beschrieben, also kommen wir auf die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, dx_1 \dots dx_n = C \int_1^\infty r^{n-1} \frac{1}{r^{\alpha p}} \, dr = C \int_1^\infty r^{n-1-\alpha p} \, dr = \frac{C}{n - \alpha p} \frac{1}{r^{\alpha p - n}} \Big|_1^\infty,$$

wobei im letzten Schritt wieder $n - \alpha p \neq 0$ angenommen wird. Dieses Integral ist also genau dann endlich, wenn $\alpha p - n > 0$, und im Fall $n - \alpha p = 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, dx_1 \dots dx_n = C \int_1^\infty \frac{dr}{r} = C \ln r|_1^\infty = \infty.$$

Schlussfolgerung: die Funktion $1/\|\mathbf{x}\|^\alpha$ gehört genau dann zu $L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)$, wenn

$$p > \frac{n}{\alpha}.$$

Der Vektorraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, genannt **Schwartzscher Raum** oder der **Raum von schnell fallenden Funktionen**, besteht aus allen glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^k \partial^\alpha f(\mathbf{x})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden Multi-index[1] α beschränkt ist. Zeigen Sie:

c) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$.

Lösung:
Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist f glatt und daher beschränkt auf $\mathbb{D}^n$, also folgt $f|_{\mathbb{D}^n} \in L^\infty(\mathbb{D}^n)$, und für jeder $1 \le p < \infty$ ist das Integral $\int_{\mathbb{D}^n} |f|^p \, dm$ durch $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}^n} |f(\mathbf{x})|^p \cdot m(\mathbb{D}^n) < \infty$ beschränkt. Außerdem ist die Funktion $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^k f(\mathbf{x})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ beschränkt, also gibt es für jedes k eine Konstante $C_k > 0$ mit

$$|f(\mathbf{x})| \le \frac{C_k}{\|\mathbf{x}\|^k}.$$

Wir wähle $k > n/p$, dann folgt aus dem Resultat von Teilaufgabe (b),

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)} \le C_k \left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^k} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)} < \infty.$$

Insgesamt folgt $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$, denn für $1 \le p < \infty$ gilt

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dm = \int_{\mathbb{D}^n} |f|^p \, dm + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n} |f|^p \, dm = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{D}^n)} + \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)} < \infty,$$

und für $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \max \left\{ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{D}^n)}, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)} \right\} < \infty.$$

d) Für jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und jeden Multi-index α gehören $\partial^\alpha f$ und $\mathbf{x}^\alpha f$ auch zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lösung:
Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt sofort von der Definition, dass $\partial^\alpha f$ auch in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, denn für einen beliebigen Multi-index β und $k \in \mathbb{N}$ ist auch

$$\|\mathbf{x}\|^k \partial^\beta \left(\partial^\alpha f\right) = \|\mathbf{x}\|^k \partial^{\alpha+\beta} f$$

beschränkt; hier wird die Summe von zwei Multi-indizes natürlich durch

$$\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

definiert.
Dass $\mathbf{x}^\alpha f$ auch in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, sieht man wie folgt. Sei β ein beliebiger Multi-index. Wir behaupten, dass $\partial^\beta(\mathbf{x}^\alpha f)$ eine endliche lineare Kombination von Termen der Form $\mathbf{x}^\gamma \partial^\delta f$ für weitere Multi-indizes γ und δ ist. Im Fall $|\beta| = 1$ folgt dies aus der Produktregel: hier gilt $\partial^\beta = \partial_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, also

$$\partial_j(\mathbf{x}^\alpha f) = (\partial_j \mathbf{x}^\alpha) f + \mathbf{x}^\alpha \partial_j f,$$

[1] Zur Erinnerung: ein **Multi-index** auf $\mathbb{R}^n$ ist ein n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Er bestimmt einen Differentialoperator von Ordnung $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ durch $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, sowie eine polynomielle Funktion $\mathbf{x}^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von Grad $|\alpha|$ durch $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

wobei $\partial_j \mathbf{x}^\alpha = \alpha_j \mathbf{x}^{\alpha'}$ für

$$\alpha' := (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n).$$

Für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ nehmen wir jetzt als Induktionsvoraussetzung an, dass die Behauptung für alle Multi-indizes β mit $|\beta| \le k$ schon bewiesen ist. Für einen Multi-index β mit $|\beta| = k+1$ können wir $\partial^\beta = \partial_j \partial^{\beta'}$ schreiben für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und einen weiteren Multi-index β' mit $|\beta'| = k$. Die Ableitung $\partial^{\beta'}(\mathbf{x}^\alpha f)$ ist dann per Annahme eine endliche lineare Kombination von Termen der Form $\mathbf{x}^\gamma \partial^\delta f$, und wegen der Produktregel gilt das Gleiche für $\partial^\beta(\mathbf{x}^\alpha f)$, denn $\partial^\beta(\mathbf{x}^\alpha f) = \partial_j \partial^{\beta'}(\mathbf{x}^\alpha f)$ und

$$\partial_j(\mathbf{x}^\gamma \partial^\delta f) = \gamma_j \mathbf{x}^{\gamma'} \partial^\delta f + \mathbf{x}^\gamma \partial^{\delta'} f$$

für

$$\begin{aligned} \gamma' &:= (\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma_j - 1, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n), \\ \delta' &:= (\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_j + 1, \delta_{j+1}, \dots, \delta_n). \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.
Um $\mathbf{x}^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ jetzt zu beweisen, wird es wegen der Behauptung reichen, die Beschränktheit von $\|\mathbf{x}\|^k \mathbf{x}^\gamma \partial^\beta f$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und Multi-indizes β, γ zu zeigen. Sei $\ell := |\gamma|$, also gilt

$$|\mathbf{x}^\gamma| = |x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}| = |x_1|^{\gamma_1} \dots |x_n|^{\gamma_n} \le \|\mathbf{x}\|^{\gamma_1} \dots \|\mathbf{x}\|^{\gamma_n} = \|\mathbf{x}\|^\ell,$$

da $|x_j| \le \|\mathbf{x}\|$ für jedes $j = 1, \dots, n$. Es folgt,

$$\left| \|\mathbf{x}\|^k \mathbf{x}^\gamma \partial^\beta f \right| \le \|\mathbf{x}\|^{k+\ell} \left| \partial^\beta f \right|,$$

und das ist wegen der Definition des Raums $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt.

e) Die Gaußsche Funktion $f(\mathbf{x}) := e^{-c\|\mathbf{x}\|^2}$ gehört für jedes $c > 0$ zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung: Der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ glatter Funktionen mit kompakten Trägern ist auch enthalten in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$, also folgt, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ auch dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Lösung:
Nur eine kurze Zusammenfassung: man zeigt induktiv bzgl. der Ordnung eines Multi-index β dass jede Ableitung $\partial^\beta(e^{-c\|\mathbf{x}\|^2})$ die Form $P_\beta(\mathbf{x})e^{-c\|\mathbf{x}\|^2}$ hat, wobei $P_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine polynomielle Funktion von $x_1, \dots, x_n$ ist. Insbesondere folgt, dass $\mathbf{x}^\alpha \partial^\beta f$ für beliebige Multi-indizes α, β eine endliche lineare Kombination von Funktionen der Form $\mathbf{x}^\gamma e^{-c\|\mathbf{x}\|^2}$ für Multi-indizes γ ist. Diese Funktion ist beschränkt durch

$$\left| \mathbf{x}^\gamma e^{-c\|\mathbf{x}\|^2} \right| \le \|\mathbf{x}\|^\ell e^{-c\|\mathbf{x}\|^2}$$

für $\ell := |\gamma|$, und dies ist nach dem gewöhnlichen Argument mit der Regel von L'Hospital beschränkt.

Aufgabe 12.2 (3 + 2 + 2 Punkte)
Der Vektorraum $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p \le \infty$ besteht aus allen Äquivalenzklassen (bis auf Gleichheit fast überall) messbarer Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die

$$\|f\|_{L^p(K)} := \left(\int_K |f|^p \, dm \right)^{1/p} < \infty$$

für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ erfüllen. Im Folgenden sind zwei Konstanten $p, r \in [1, \infty]$ mit $r > p$ gegeben.

a) Beweisen Sie: für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\|f\|_{L^p(K)} \leq c\|f\|_{L^r(K)}$ für alle messbaren Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$. Insbesondere folgt: $L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Die konstante Funktion 1 ist in $L^q(K)$ für jedes $q \in [1, \infty]$.

Lösung:
Da $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, gilt

$$m(K) < \infty,$$

denn K ist für $R > 0$ hinreichend groß enthalten in der Kugel von Radius R, die endliches Lebesgue-Maß hat. Wir möchten das Integral $\|f\|^p_{L^p(K)} = \int_K |f|^p \, dm$ von oben abschätzen, indem wir $|f|^p$ als Produkt $|f|^p \cdot 1$ betrachten und die Hölder-Ungleichung anwenden. Wenn $p < r < \infty$, dann ist r/p in $(1, \infty)$ und die L^r-Norm von f kann in der Form

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(K)} &= \left(\int_K |f|^r \, dm\right)^{1/r} = \left(\int_K (|f|^p)^{r/p} \, dm\right)^{1/r} = \left[\left(\int_K (|f|^p)^{r/p} \, dm\right)^{p/r}\right]^{1/p} \\
&= \||f|^p\|^{1/p}_{L^{r/p}(K)}
\end{aligned}$$

geschrieben werden. Im Fall $p < r = \infty$ sagt diese Relation

$$\|f\|^p_{L^\infty(K)} = \||f|^p\|_{L^\infty(K)}$$

und stimmt immer noch. Sei jetzt $q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{r/p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Konstante Funktion $g := 1$ ist in $L^q(K)$, da

$$\|g\|^q_{L^q(K)} = \int_K 1^q \, dm = m(K) < \infty,$$

also folgt von der Hölder-Ungleichung,

$$\|f\|^p_{L^p(K)} = \int_K |f|^p \cdot g \, dm \leq \||f|^p\|_{L^{r/p}(K)} \cdot \|g\|_{L^q(K)} = [m(K)]^{1/q} \cdot \|f\|^p_{L^r(K)},$$

und daher,

$$\|f\|_{L^p(K)} \leq [m(K)]^{1/pq} \cdot \|f\|_{L^r(K)}. \tag{1}$$

Kommentar: wenn $r < \infty$ gibt es ein alternatives Argument, mit dem man ohne die Hölder-Ungleichung die Inklusion $L^r(K) \subset L^p(K)$ beweisen kann. Sei $f \in L^r(K)$, und definiere zwei messbare Teilmengen

$$\begin{aligned}
K^+ &:= \left\{\mathbf{x} \in K \;\middle|\; |f(\mathbf{x})| > 1\right\} \subset K, \\
K^- &:= \left\{\mathbf{x} \in K \;\middle|\; |f(\mathbf{x})| \leq 1\right\} \subset K.
\end{aligned}$$

Dann gilt $|f| \leq 1$ auf K^- und $|f|^p \leq |f|^r$ auf K^+, also

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(K)} = \int_K |f|^p \, dm &= \int_{K^-} |f|^p \, dm + \int_{K^+} |f|^p \, dm \\
&\leq \int_{K^-} 1 \, dm + \int_{K^+} |f|^r \, dm \leq m(K^-) + \int_K |f|^r \, dm \\
&\leq m(K) + \|f\|^r_{L^r(K)} < \infty,
\end{aligned} \tag{2}$$

also $f \in L^p(K)$.

Obwohl dieses Argument einfacher ist, ist die Abschätzung (1) eigentlich ein besseres Resultat, aus dem folgenden Grund. In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass ein lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{R}$ auf einem Banachraum E genau dann stetig ist, wenn es eine Abschätzung der Form $|\ell(x)| \leq c\|x\|$ gibt. Das Gleiche gilt im Allgemeinen für lineare Abbildungen zwischen beliebigen Banachräumen, und wird mit dem gleichen Argument bewiesen. Die Abschätzung (1) sagt uns also nicht nur, dass $L^r(K)$ in $L^p(K)$ enthalten ist, sondern auch, dass die natürliche Inklusionsabbildung $L^r(K) \hookrightarrow L^p(K)$ *stetig* ist.
Also letzte Bemerkung sollte betont werden, dass beide Abschätzungen (1) und (2) ohne die Bedingung $m(K) < \infty$ nutzlos wären; in dieser Diskussion war also nicht wesentlich, dass $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, aber K musste unbedingt eine Menge von endlichem Maß sein. Teilaufgabe (c) unten zeigt, dass die Inklusion $L^r(K) \subset L^p(K)$ im Allgemeinen falsch ist, wenn $m(K) = \infty$.

b) Finden Sie ein explizites Beispiel einer Funktion in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Lösung:
Wir betrachten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form $f(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|^\alpha$ für $\alpha > 0$. Nach dem Resultat von Aufgabe 12.1(a) ist diese Funktion in $L^p(\mathbb{D}^n)$ genau dann, wenn $\alpha < n/p$. Sei $\mathbb{D}^n_R$ die Kugel von Radius $R > 0$; dann gilt eigentlich das gleiche Resultat für $L^p(\mathbb{D}^n_R)$, denn $\int_{\mathbb{D}^n_R} |f|^p \, dm$ ist jetzt Proportional zum Integral

$$\int_0^R r^{n-1-\alpha p} \, dr,$$

das unter genau den selben Bedingungen endlich ist. Da jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ in B^n_R enthalten ist für $R > 0$ hinreiche groß, folgt, dass f dann in $L^p(K)$ ist. Andererseits, falls $\alpha \geq n/r$, dann folgt direkt aus Aufgabe 12.1(a), dass f nicht in $L^r(\mathbb{D}^n)$ ist, also kann f nicht in $L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sein. Fazit: die Funktion $f(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|^\alpha$ ist in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, falls

$$\frac{n}{r} \leq \alpha < \frac{n}{p},$$

was natürlich möglich ist, weil $r > p$.

c) Finden Sie ein explizites Beispiel einer Funktion in $L^r(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lösung:
Nach dem Resultat von Aufgabe 12.1(b) ist die Funktion $g(\mathbf{x}) := 1/\|\mathbf{x}\|^\alpha$ in $L^r(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)$, wenn $\alpha > n/r$, und gleichzeitig nicht in $L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)$, wenn $\alpha \leq n/p$. Beide können gleichzeitig erfüllt werden, da $r > p$, aber g muss in $\mathbb{D}^n$ modifiziert werden, denn die Singularität in $\mathbf{x} = 0$ verursacht $\|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \geq \|g\|_{L^r(\mathbb{D}^n)} = \infty$. Wir definieren also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} & \text{für } \|\mathbf{x}\| \geq 1, \\ 0 & \text{für } \|\mathbf{x}\| < 1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist in $L^r(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn

$$\frac{n}{r} < \alpha \leq \frac{n}{p}.$$

Aufgabe 12.4 (5 Punkte)
Wir betrachten $\Omega := (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß, und bezeichnen mit $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum aller glatten Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompakten Trägern. Weil $C_0^\infty(\Omega)$ für alle $p \in [1,\infty)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt, wissen wir, dass jede $f \in L^p(\Omega)$ die Grenzfunktion einer L^p-konvergenten Folge $f_j \in C_0^\infty(\Omega)$ ist. Zeigen Sie: falls $p > 1$ und eine Konstante $c > 0$ mit $\|f_j'\|_{L^p} \le c$ für alle j existiert, dann gilt $f = g$ f. ü. für eine *stetige* Funktion g.
Hinweis: Versuchen Sie, durch die Hölder-Ungleichung zu zeigen, dass f_j die Voraussetzungen für den Satz von Arzelà-Ascoli erfüllt.
Lösung:
Per Annahme sind die Funktionen $f_j : (0,1) \to \mathbb{R}$ glatt mit kompakten Trägern, und es gilt

$$f_j \xrightarrow{L^p} f \qquad \text{und} \qquad \|f_j'\|_{L^p} \le c.$$

Wir können diese Funktionen auch auf $[0,1]$ erweitern, so dass die f_j alle noch glatt sind und in den Endpunkten 0 und 1 verschwinden.
Laut dem Satz über die Vollständigkeit von L^p folgt aus der L^p-Konvergenz, dass f_j auch eine Teilfolge hat, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Laß uns jetzt f_j mit dieser Teilfolge ersetzen und o.B.d.A. annehmen, dass $f_j \to f$ fast überall. Wir behaupten: f_j hat auf $[0,1]$ auch eine *gleichmäßig* konvergente Teilfolge. Weil die f_j alle stetig sind, muss die Grenzfunktion dieser Teilfolge dann eine stetige Funktion g sein. Aber gleichzeitig konvergiert diese Teilfolge punktweise fast überall gegen f, was impliziert, dass f und g fast überall übereinstimmen. Es bleibt also nur, die Behauptung über gleichmäßige Konvergenz zu beweisen.
Die Behauptung wird aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgen, wenn wir zeigen können, dass die Folge f_j gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. Sei $0 \le x < y \le 1$. Weil f_j auf $[0,1]$ stetig differenzierbar ist, können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden, und anschließend die Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |f_j(y) - f_j(x)| &= \left| \int_x^y f_j'(t)\,dt \right| \le \int_{[x,y]} |f_j'|\;dm = \int_{[x,y]} |f_j'| \cdot 1\,dm \\ &\le \|f_j'\|_{L^p([x,y])} \cdot \|1\|_{L^q([x,y])}, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wegen $p > 1$ wissen wir $q < \infty$, also

$$\|1\|_{L^q([x,y])} = \left(\int_{[x,y]} 1^q\,dm \right)^{1/q} = |y - x|^{1-\frac{1}{p}},$$

was wegen $\|f_j'\|_{L^p} \le c$ und (3) jetzt die Abschätzung

$$|f_j(y) - f_j(x)| \le c|y - x|^\alpha, \qquad \alpha := 1 - \frac{1}{p} > 0$$

für alle $x, y \in [0,1]$ impliziert. Diese Bedingung impliziert die gleichgradige Stetigkeit der Folge f_j, denn für jedes $\epsilon > 0$, können wir jetzt $\delta > 0$ mit $c\delta^\alpha < \epsilon$ wählen, um die Implikation

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon$$

gleichzeitig für alle j zu erreichen. Die gleichmäßige Beschränktheit folgt auch, denn $f_j(0) = 0$ für alle j, also folgt für beliebiges $x \in [0,1]$,

$$|f_j(x)| = |f_j(x) - f_j(0)| \le c|x - 0|^\alpha = c|x|^\alpha \le c.$$

Die Voraussetzungen für den Satz von Arzelà-Ascoli sind somit erfüllt.
Kommentar: Das Resultat in dieser Aufgabe ist mehr oder weniger ein Spezialfall des sogenannten Sobolevschen Einbettungssatzes, der wichtige Anwendungen in der Theorie partieller Differentialgleichungen hat. Im diesem Kontext sieht der Satz etwa so aus: für jedes $p \in [1, \infty]$ *definiert man eine Norm auf glatten Funktionen* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *durch*

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}.$$

Der Banachraum $W^{1,p}([0, 1])$ *kann als Abschluss von* $C^\infty([0, 1])$ *bzgl. dieser Norm definiert werden. Im Allgemeinen müssen Funktionen in* $W^{1,p}([0, 1])$ *nicht differenzierbar sein, und im Fall* $p = 1$ *zeigt Aufgabe 12.D, dass sie auch nicht stetig sein müssen. Für* $p > 1$ *sagt der Sobolevsche Einbettungssatz, dass alle Elemente in* $W^{1,p}([0, 1])$ *durch stetige Funktionen darstellbar sind, und zwar gibt es eine natürliche stetige Inklusion*

$$W^{1,p}([0, 1]) \hookrightarrow C([0, 1]).$$

Solche Resultate können verwendet werden, um z.B. zu beweisen, dass alle Lösungen bestimmter Klassen von partiellen Differentialgleichungen automatisch glatte Funktionen sind.

Aufgabe 12.A
Geben Sie einen direkten Beweis (ohne Reihen oder absolute Konvergenz), dass alle Cauchy-Folgen in $L^\infty(\mu)$ bzgl. der L^∞-Norm konvergieren, und dass sie auch punktweise fast überall konvergieren.

Lösung:
Wir betrachten einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit einer L^∞-Cauchy-Folge $f_n \in L^\infty(\mu)$. Es existiert also für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $N(k) \in \mathbb{N}$, so dass

$$m, n \geq N(k) \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}.$$

Konkreter heißt das, für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N(k)$ existiert eine Nullmenge $E^k_{m,n} \subset X$, so dass

$$|f_n - f_m| \leq \frac{1}{k} \quad \text{auf} \quad X \setminus E^k_{m,n}.$$

Die Menge

$$E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m,n \geq N(k)} E^k_{m,n}$$

ist dann eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen und daher auch eine Nullmenge, und die Ungleichung $|f_n - f_m| \leq 1/k$ gilt auf $X \setminus E$ für alle k und $m, n \geq N(k)$. Für alle $x \in X \setminus E$ ist $f_n(x)$ daher eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also konvergiert sie, und wir definieren $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{für } x \in X \setminus E, \\ 0 & \text{für } x \in E. \end{cases}$$

Jetzt konvergiert f_n punktweise auf $X \setminus E$ gegen f, und wir behaupten, dass diese Konvergenz auch gleichmäßig ist. Gegeben $\epsilon > 0$, wählen wir $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < \epsilon$, dann gilt

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N(k) \text{ und } x \in X \setminus E.$$

Setzen wir n fest und betrachten den Limes bei $m \to \infty$, es folgt

$$\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| \le \epsilon$$

für alle $n \ge N(k)$ und $x \in X \setminus E$. Da $E \subset X$ eine Nullmenge ist, folgt

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \le \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge N(k),$$

und das beweist die Konvergenz $f_n \to f$ in $L^\infty(\mu)$.

Aufgabe 12.D
Zeigen Sie, dass die Aussage in Aufgabe 12.4 im Fall $p = 1$ falsch ist.
Lösung:
Wir suchen nach einer Folge von glatten Funktionen $f_j : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit kompakten Trägern, die eine Schranke $\|f_j'\|_{L^1} \le c$ erfüllen und bzgl. der L^1-Norm gegen eine Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ konvergieren, die nicht fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Wir beschreiben zuerst die Ableitungen f_j'. Auf dem Teilintervall $[0,1/2]$ wählen wir $f_j' \ge 0$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Träger von $f_j'|_{[0,1/2]}$ ist enthalten in einem Teilintervall mit Länge $1/8j$ um das Zentrum $1/4$.
- $\displaystyle\int_0^{1/2} f_j'(t)\,dt = 1.$

Diese Folge auf $[0,1/2]$ sieht ein bisschen so aus wie eine approximative Einheit: der Maximumwert von f_j' wird mit j immer größer, während der Träger kleiner wird. Nun setzen wir f_j' fort auf $[1/2,1]$ durch die Bedingung

$$f_j'(x) := -f_j'(x - 1/2),$$

und definieren damit f_j durch

$$f_j(x) = \int_0^x f_j'(t)\,dt.$$

Per Konstruktion gilt jetzt

$$\int_0^1 |f_j'(x)|\,dx = \int_0^{1/2} f_j'(x)\,dx - \int_{1/2}^1 f_j'(x)\,dx = 2,$$

und es gibt eine Folge $\epsilon_j > 0$ mit $\epsilon_j \to 0$, so dass $f = 0$ auf $[0, 1/4-\epsilon_j]$ und $[3/4+\epsilon_j, 1]$, aber $f = 1$ auf $[1/4+\epsilon_j, 3/4-\epsilon_j]$. In den Intervallen $[1/4-\epsilon_j, 1/4+\epsilon_j]$ und $[3/4-\epsilon_j, 3/4+\epsilon_j]$ hat f Werte in $[0,1]$. Mit diesen Informationen ist leicht zu zeigen, dass f_j bzgl. der L^1-Norm gegen $f := \chi_{[1/4,3/4]}$ konvergiert, d.h. die charakteristische Funktion von $[1/4,3/4]$. Es gibt keine stetige Funktion g, die fast überall mit f übereinstimmt, denn wenn das so wäre, dann müsste g auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $1/4$ nur Werte in einem kleinen Intervall haben, das nicht gleichzeitig 0 und 1 enthalten könnte.