Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 2

Schriftliche Abgabe: Dienstag 29. Oktober 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 2.1 (2 + 2 + 3 Punkte)
Ein Differentialgleichungssystem k-ter Ordnung in $\mathbb{R}^n$ der Form

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = F\big(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k-1)}(t)\big)$$

heißt **linear** und **homogen**, falls die Funktion F stetig ist und für jedes t eine lineare Abbildung

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}^n : (\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}) \mapsto F(t, \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{k-1})$$

definiert. Mit anderen Worten, ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem k-ter Ordnung in $\mathbb{R}^n$ kann in der Form

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{A}_0(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \ldots + \mathbf{A}_{k-1}(t)\mathbf{x}^{(k-1)}(t)$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{A}_j(t)$ für $j = 0, \ldots, k-1$ stetige $\mathbb{R}^{n\times n}$-wertige Funktionen sind. In der Vorlesung haben wir den autonomen Fall mit $k = 1$ gelöst, d.h. die Gleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine unabhängig von t fixierte Matrix. Im nichtautonomen Fall lassen sich solche Systeme nicht immer explizit lösen, aber zeigen Sie:

a) Die Menge aller Lösungen ist ein Vektorraum.

b) Für das Anfangswertproblem zu einem linearen homogenen Differentialgleichungssystem k-ter Ordnung ist das dazu äquivalente Anfangswertproblem erster Ordnung auch durch ein *lineares homogenes* Differentialgleichungssystem definiert.

c) Für jedes lineare homogenene Differentialgleichungsystem sind Lösungen des Anfangswertproblems eindeutig.

Bemerkung: Wir werden später auch zeigen können, dass Lösungen eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden können.

Aufgabe 2.2 (4 + 4 Punkte)
Für jedes der folgenden linearen Differentialgleichungssysteme auf $\mathbb{R}^2$, schreiben Sie mittels Eigenvektoren und Eigenwerte die allgemeine Lösung (mit zwei freien Parametern) explizit hin, und zeichnen Sie ein Phasenportrait in der (x, y)-Ebene.

a) $\dot{x} = -x - y$ und $\dot{y} = -2y$.

b) $\dot{x} = x - 2y$ und $\dot{y} = -y$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x^2 e^{tx}, \qquad x(0) = 1$$

für eine reellwertige Funktion $x(t)$. Versuchen Sie nicht, eine explizite Lösung zu finden, aber wenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz an, um zu beweisen, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung $x : [0, 1/8] \to \mathbb{R}$ besitzt, und dass ihr Bild im Intervall $[1, 2]$ liegt.
Bemerkung: Im Skript von Baum gibt es eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf, die bei dieser Aufgabe direkt angewendet werden könnte. Wir haben diese Form der Aussage in der Vorlesung nicht bewiesen, deswegen dürfen Sie sie hier nicht anwenden. Der Zweck der Aufgabe ist, nicht einfach ein Resultat zu zitieren, sondern die Ideen im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf anzuwenden.

Aufgabe 2.4 (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)
Sei $[0, r)$ das Maximale Intervall in $[0, \infty)$, auf dem eine Lösung $x : [0, r) \to \mathbb{R}$ zum in Aufgabe 2.3 betrachteten Anfangswertproblem definiert werden kann. Laut dem Resultat jener Aufgabe gilt $r > 1/8$; Ziel der jetzigen ist $r \leq 1$ zu beweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir Funktionen y und x_ϵ (für jedes $\epsilon \geq 0$), die die verwandten Anfangswertprobleme

$$\dot{y} = y^2, \quad y(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \dot{x}_\epsilon = x_\epsilon^2 e^{tx_\epsilon}, \quad x_\epsilon(0) = 1 + \epsilon$$

erfüllen, wobei immer angenommen wird, dass eine Lösung auf dem maximalen Intervall definiert ist. Per Definition gilt $x_0(t) = x(t)$ für alle $t \in [0, r)$.

a) Finden Sie $y(t)$ explizit und zeigen Sie, dass $y(t)$ nur für $t < 1$ definiert werden kann.

b) Zeigen Sie: x_ϵ erfüllt für alle $t > 0$ im Definitionsintervall $\dot{x}_\epsilon > x_\epsilon^2$.

c) Beweisen Sie: Für $\epsilon > 0$ gilt $x_\epsilon(t) > y(t)$ für alle $t \geq 0$ im gemeinsamen Definitionsintervall von beiden Funktionen.
Hinweis: Wegen Stetigkeit und der Anfangsbedingungen gilt die Ungleichung offensichtlich für $t \geq 0$ in einer Umgebung von 0. Angenommen $t_1 > 0$ sei die kleinste Zahl mit $x_\epsilon(t_1) - y(t_1) \leq 0$. Was können Sie mit Hilfe der Differentialungleichung in Teilaufgabe (b) über $\dot{x}_\epsilon(t_1) - \dot{y}(t_1)$ sagen?

d) Wenden Sie den Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten an (s. Vorlesung am 24.10.), um zu folgern, dass $x(t) \geq y(t)$ für alle $t \in [0, 1) \cap [0, r)$ gilt. Folgern Sie weiter, dass $r \leq 1$ gilt.

Insgesamt: **29 Punkte**

Die folgende Aufgabe wird teilweise in den Übungen besprochen, ist aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 2.A
Wir betrachten zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Beweisen Sie:

a) Falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kommutieren, dann kommutiert $\mathbf{A}$ auch mit $e^{\mathbf{B}}$.

b) Falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kommutieren, dann gilt $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}$.
Hinweis: Vergleichen Sie die Funtionen $f(t) := e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$ und $g(t) := e^{t\mathbf{A}} e^{t\mathbf{B}}$. Was für Anfangswertprobleme erfüllen sie?

c) Falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nicht kommutieren, dann gilt $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \neq e^{t\mathbf{A}} e^{t\mathbf{B}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ hinreichend nahe an 0.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe der Funktion $t \mapsto e^{t\mathbf{A}} e^{t\mathbf{B}} - e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$.