Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis III
WiSe 2019–20

Behandelte Themen in der Vorlesung (regelmäßig aktualisiert)

- *Di. 15.10.2019*: kurze Vorschau der Vorlesung, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ als Motivationsbeispiel für mehrdimensionale Integration; Beispiele von gewöhnlichen Differentialgleichungen (Gleichung zweiter Ordnung aus der Mechanik), das Anfangswertproblem für Gleichungen erster Ordnung, die Methode der Trennung der Variablen, Lösung des Anfangswertproblems für die Gleichung $\dot{x} = cx$
- *Do. 17.10.2019*: Beweis der Eindeutigkeit von Lösungen zum Anfangswertproblem für $\dot{x} = cx$, lineare Systeme der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, das Matrixexponential (Konvergenz und Differenzierbarkeit) (s. Baum, §8.4.2 bis Folgerung 8.7), $e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$ als Lösung, Beweis von $e^{-\mathbf{A}} = (e^{\mathbf{A}})^{-1}$, Lösung durch Eigenvektoren und Eigenwerte, Phasenkurven und Phasenportraits, Anfangswertprobleme höherer Ordnung und Reduktion auf Systeme erster Ordnung (s. Satz 8.1 in Baum)
- *Di. 22.10.2019*: Aussage (ohne Beweis) des Satzes von Cauchy-Peano, Beispiel $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ (Nichteindeutigkeit), Beispiel $\dot{x} = 2tx^2/\epsilon^2$ (Existenz nur für kurze Zeit), Satz von Picard-Lindelöf und Beweis durch Banachschen Fixpunktsatz, C^1 impliziert Lipschitz
- *Do. 24.10.2019*: die maximale Lösung eines Anfangswertproblems, parameterabhängige Differentialgleichungen, Definition vom globalen Fluss, Lemma über die Stetigkeit vom lokalen Fluss (bewiesen mit Banachschem Fixpunktsatz), Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern
- *Di. 29.10.2019*: Satz über Definitionsintervalle von maximalen Lösungen, Oberfunktionen und Unterfunktionen[1]
- *Do. 31.10.2019*: Lösung der allgemeinen linearen (homogenen) Differentialgleichung erster Ordnung auf $\mathbb{R}$, die Grönwall-Ungleichung (mit Beweis durch Unterfunktionen), lineare (homogene und inhomogene) Differentialgleichungssysteme, die Lösungsmenge ist ein Vektorraum bzw. affiner Raum, Satz über globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zum linearen Anfangswertproblem (mit Abschätzung mittels Grönwall), die Dimension des Lösungsraums, linear unabhängige Lösungen sind auch in jedem Punkt linear unabhängig, Fundamentalsysteme und Fundamentalmatrizen, Lösung zum homogenen Anfangswertproblem durch die Hauptfundamentalmatrix, die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix, Lemma über die Spur einer Matrix als Ableitung der Determinante, die lineare Differentialgleichung und Formel für die Wronski-Determinante
- *Di. 5.11.2019*: differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

[1] Hinweis für alle, die es noch nicht mitbekommen haben: auf der Website gibt es inzwischen ein Vorlesungsskript (noch im Bau), wo die Inhalte der Vorlesungen von etwa 22.10. bis voraussichtlich 5.11. ausgearbeitet werden sollen.

- *Do. 7.11.2019*: der Satz von Cauchy-Peano, Beweis durch Näherungslösungen (siehe z.B. §II.7 im Buch von Amann), gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenfolgen, der Satz von Arzelà-Ascoli (siehe Satz 8.13 im Baum-Skript); kompakte metrische Räume sind separabel (wurde als Übungsaufgabe gelassen)

- *Di. 12.11.2019*: korrigierter zweiter Schritt im Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli, Einführung der Grundideen der Maßtheorie: das Integral von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit nur endlich vielen Werten, die Notation 2^X, Wunscheigenschaften für ein Maß $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$, $\mu(X) = 0$ für abzählbare Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$, Bemerkungen über die Unvollständigkeit des Raumes $C([0, 1])$ mit L^1- und L^2-Normen, Auswahlaxiom und Beispiel einer Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, auf der kein Maß $\mu(B)$ mit den Wunscheigenschaften definiert werden kann

- *Do. 14.11.2019*: σ-Algebren und messbare Räume, Existenz und Eindeutigkeit der kleinsten σ-Algebra, die eine gegebene Teilmenge $\mathcal{E} \subset 2^X$ enthält, der Raum $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ und seine offene Teilmengen, die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines metrischen Raumes X, F_σ- und G_δ-Mengen, Charakterisierung der Stetigkeit durch offene Mengen, messbare Funktionen zwischen messbaren Räumen oder von einem messbaren Raum nach $\overline{\mathbb{R}}$, Borel-messbare Funktionen zwischen metrischen Räumen, Charakterisierungen der Messbarkeit durch Urbilder von offenen Mengen bzw. Intervallen, Axiome vom Maß auf einem messbaren Raum, Äquivalenz der Bedingungen $\mu(A) < \infty$ für irgendein $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(\emptyset) = 0$
Literatur: Salamon, Teile von §1.1 und §1.2

- *Di. 19.11.2019*: $\mu(\bigcup_i A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ für $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $\mu(\bigcap_i A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ für $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ mit $\mu(A_i) < \infty$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ messbar g.d.w. Komponentenfunktionen $X \to \mathbb{R}$ alle messbar (mit Lemma: jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung offener Quader), $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow f + g$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und $|f|$ sind messbar, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\Rightarrow \sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ sind messbar, punktweise konvergente Folgen messbarer Funktionen haben messbare Grenzfunktionen, einfache Funktionen und charakteristische Funktionen, $f : X \to [0, \infty]$ ist messbar g.d.w. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise für eine Folge messbarer einfacher Funktionen mit $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \le f$, Definition des Lebesgue-Integrals für eine messbaren Funktion $f : X \to [0, \infty]$ auf einer messbaren Teilmenge $E \subset X$ in einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$
Literatur: Salamon, der Rest von §1.1 und §1.2, §1.3 bis Definition 1.34

- *Do. 21.11.2019*: Integrale von Treppenfunktionen hängen nicht von ihrer Darstellung als lineare Kombination charakteristischer Funktionen ab, verschiedene Eigenschaften des Integrals für messbare Funktionen $f : X \to [0, \infty]$ ($f \le g \Rightarrow \int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$, $\int_E f\,d\mu = \int_X \chi_E f\,d\mu$, $\int_E f\,d\mu = 0$ wenn $f|_E \equiv 0$ oder $\mu(E) = 0$, $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$, Additivität im Fall von Treppenfunktionen), $\int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_k} s\,d\mu$ für eine disjunkte Vereinigung $E = \bigcup_i E_i$ und eine Treppenfunktion s, der Satz über monotone Konvergenz
Literatur: Salamon, §1.3 bis zum Ende des Beweises von Theorem 1.37

- *Di. 26.11.2019*: σ-Additivität des Integrals nichtnegativer messbarer Funktionen, das Maß μ_f für eine Funktion $f : X \to [0, \infty]$, Definition von μ-Integrierbarkeit, der Raum $\mathscr{L}^1(\mu)$ und das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, Bemerkung über absolute/bedingte Konvergenz ($\frac{\sin x}{x}$ ist auf $[1, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar aber das uneigentliche Riemann-Integral $\int_1^\infty \frac{\sin}{x}\,dx$ ist bedingt konvergent), Satz über Eigenschaften des Integrals (Linearität, $f \le g \Rightarrow \int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$,

$|\int_E f\,d\mu| \le \int_E |f|\,d\mu$, σ-Additivität, $\int_E f\,d\mu = \int_X \chi_E f\,d\mu$, $\int_E f\,d\mu = 0$ falls $f|_E = 0$ oder $\mu(E) = 0$), Nullmengen und der Begriff "fast überall", $f : X \to [0,\infty]$ μ-integrierbar $\Rightarrow$ $f < \infty$ f.ü. (Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ist auf $[-1,1]$ Lebesgue-integrierbar aber nur fast überall endlich), $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ für alle E, $\int_E f\,d\mu$ ist wohl definiert auch wenn f nur fast überall definiert ist, $f = 0$ f.ü. $\Leftrightarrow$ $\int_A f\,d\mu = 0$ für alle A $\Leftrightarrow$ $\int_X |f|\,d\mu = 0$
Literatur: Salamon, §1.4 bis vor Theorem 1.45, dann §1.5 bis Lemma 1.49

- *Do. 28.11.2019*: Beweis von $\int_X |f|\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ f.ü., Definition vom Raum $L^1(\mu) = L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ und der L^1-Norm, Cauchyfolgen mit konvergenten Teilfolgen konvergieren (Lemma 1), ein normierter Vektorraum ist vollständig g.d.w. jede absolut konvergente Reihe konvergiert (Lemma 2), absolut L^1-konvergente Reihen konvergieren bzgl. der L^1-Norm und auch punktweise fast überall (Satz 2), L^1-Cauchyfolgen konvergieren in L^1 und haben punktweise fast überall konvergente Teilfolgen (Satz 1 / Korollar von Satz 2), das Lemma von Fatou, Lebesguescher Konvergenzsatz und Anwendung beim Beweis von Satz 2
Literatur: Salamon, Theorem 1.41 in §1.3, Theorem 1.45 in §1.4, Theorem 1.52 bis zum Ende von §1.5

- *Di. 3.12.2019*: philosophische Bemerkungen über die Definition des Lebesgue-Integrals durch konvergente Folgen von Treppenfunktionen (s. Aufgabe 8.B), Satz über Stetigkeit und Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Lebesgue-Integralen, die Vervollständigung eines Maßraums (Aussage ohne Beweis), Aussage der Existenz vom Lebesgue-Maß als Vervollständigung eines translationsinvarianten Maßes auf den Borelmengen in $\mathbb{R}^n$, Lebesgue-Messbarkeit von Teilmengen und Funktionen $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, Äquivalenz des Lebesgue- und (uneigentlichen) Riemann-Integrals für stetige Funktionen auf Intervallen
Literatur: Salamon, §1.6, Skript über parameterabhängige Lebesgue-Integrale[2], für die Äquivalenz von stetigen Lebesgue- und Riemann-Integralen basiert das Argument prinzipiell auf Aufgaben 7.2(c) und 7.3(c)

- *Do. 5.12.2019*: Definition und Eigenschaften des äußeren Maßes von Lebesgue, äußere Maße $\nu : 2^X \to [0,\infty]$ auf beliebigen Mengen X, ν-Messbarkeit, ν-messbare Teilmengen bilden eine σ-Algebra und ν ist darauf ein vollständiges Maß (Satz 1 von Carathéodory), Carathéodorys Kriterium für die ν-Messbarkeit von Borelmengen (Beweis noch nicht zu Ende ausgeführt)
Literatur: Salamon, §2.1 und §2.2 bis Corollary 2.12

- *Di. 10.12.2019*: Kruze Wiederholung und Ende des Beweises vom Carathéodory-Kriterium, Existenz des Lebesgue-Maßes auf Borelmengen (Korollar), warum nicht alle Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ Borelmengen sind, Regularität von außen und von innen für das äußere Maß von Lebesgue (Satz 3; Beweis nur sehr kurz skizziert), das Lebesgue-Maß als Vervollständigung von einem Maß auf Borelmengen (Satz 4; Beweis als Anwendung von Satz 3 skizziert), Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes auf Borelmengen (Satz 5; Beweis nur sehr kurz skizziert), die Notation $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,d^n x$ und Aussage des Satzes von Fubini für das Lebesgue-Maß, Berechnung von $\int_E x\sqrt{1+y^3}\,dx\,dy$ für $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ x \le y \le 2\}$
Literatur: Salamon, Theorem 2.5 und §2.2 von Theorem 2.13 bis zum Ende (die

[2] Skript verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_parameter.pdf`

Beweise von den Theoremen 2.13 und 2.14 und die Eindeutigkeit im Beweis von Theorem 2.1 wurden in der Vorlesung nur sehr flüchtig besprochen)

- *Do. 12.12.2019*: Berechnung vom Volumen einer 3-dimensionalen Kugel, Volumen unter dem Graphen einer messbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, das Beispiel

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \right) dy$$

(Fubini gilt nicht weil nicht Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]^2$), Idee des Produktmaßes, σ-Endlichkeit, Schwierigkeiten bei $[0, 1] \times [0, 1]$ mit dem Produkt von Lebesgue- und Zählmaß, das Produkt von zwei σ-Algebren, die Mengen E_x und E^y für $E \subset X \times Y$ mit $x \in X$ und $y \in Y$, $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow E_x \in \mathcal{B}$ und $E^y \in \mathcal{A}$ für alle x, y, Messbarkeit von $f(x, \cdot) : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f(\cdot, y) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (Lemma 1), $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ für metrische Räume mit Gleichheit im Fall $X = \mathbb{R}^k$ und $Y = \mathbb{R}^\ell$ (Lemma 2), Algebren und monotone Mengensysteme, ein Mengensystem ist eine σ-Algebra g.d.w. Algebra und monoton (Lemma 3), das kleinste monotone System erzeugt durch eine Algebra ist eine σ-Algebra ("monotone class theorem"; nicht bewiesen, aber s. Lemma 7.5 bei Salamon), elementare Mengen sind eine Algebra, Korollar: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist das kleinste durch elementare Mengen erzeugte monotone System
Literatur: Salamon, §7.1

- *Di. 17.12.2019*: Existenz und Eindeutigkeit (Satz 1) des Produktmaßes $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ auf dem Produkt von zwei σ-endlichen Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, Beweis der Gleichheit der Integrale $\int_X \nu(E_x) \, d\mu(x)$ und $\int_Y \mu(E^y) \, d\nu(y)$ (Hauptlemma) durch elementare Mengen und monotone Systeme, Satz von Fubini (Version 1) und Beweis für $(\mu \otimes \nu)$-messbare Funktionen $f : X \times Y \to [0, \infty]$, Satz von Fubini (Version 2) und Beweis für $(\mu \otimes \nu)$-integrierbare Funktionen $f : X \times Y \to \mathbb{R}$
Literatur: Salamon, §7.2 und §7.3 (Theorems 7.17 und 7.20)

- *Do. 19.12.2019*: das Lebesgue-Maß $m_n : \mathcal{A}_n \to [0, \infty]$ auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ als eingeschränktes Produktmaß, Produktmaße sind in der Regel nicht vollständig, $(m_k \otimes m_\ell)^* = m_n$ (Übungsaufgabe), Satz von Fubini (Version 3) für $(\mu \otimes \nu)^*$-messbare bzw. -integrierbare Funktionen auf dem Produkt von zwei vollständigen Maßräumen, Motivation und Aussage der Transformationsformel, Integration in Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$, $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} \, dx \, dy = \pi$ und $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$, $\mathrm{Vol}(B_R^n) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n$ für die Kugel $B_R^n \subset \mathbb{R}^n$ von Radius R
Literatur: Salamon, §7.3 (Theorem 7.23), §7.4 (nur flüchtig diskutiert), §2.3 (Theorem 2.17, noch ohne Beweis); für eine Zusammenfassung der Herleitung der Formel $\mathrm{Vol}(B_R^n) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n$*, siehe* `https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball#Gaussian_integrals`

- *Di. 7.01.2020*: Schritte zum Beweis der Transformationsformel: $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim V < n$ ist eine Nullmenge (Lemma 1), für $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $m(A(E)) = |\operatorname{Det} A| \cdot m(E)$ (Lemma 2), Wiederholung vom Beweis des Umkehrsatzes mittels Banachschen Fixpunktsatzes und Abschätzung von $m(\varphi(Q))$ von unten und oben für einen Quader Q und $\varphi \in C^1$ (Lemmas 3 und 4), jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung von Quadern teilweise mit Rand (Lemma 5), für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ und eine offene Menge E mit kompaktem Abschluss in $\mathcal{U}$ gilt $m(\varphi(E)) = \int_E |\operatorname{Det} D\varphi| \, dm$
Literatur: Salamon, §2.3

- *Do. 9.01.2020*: Ende des Beweises der Transformationsformel, Definition der Räume $L^p(\mu)$ für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $p \in [1, \infty]$, Minkowski-Ungleichung (Satz 1), Hölder-Ungleichung (Satz 2), absolut konvergente Reihen in $L^p(\mu)$ konvergieren (Satz 3, mit Beweis nur für $p < \infty$), $L^p(\mu)$ ist ein Banachraum und L^p-konvergente Folgen haben punktweise fast überall konvergente Teilfolgen
Literatur: Salamon, §4.1–2

- *Di. 14.01.2020*: $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$, Definition der Faltung $f * g$ von zwei Funktionen, Wiederholung von Multi-indizes und der Notation ∂^α, $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$ für f glatt mit kompaktem Träger und g lokal integrierbar, die Youngsche Ungleichung $\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$, approximative Einheiten und die approximierende Folge von glatten Funktionen $f_j := \rho_j * f$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, Skizze des Beweises der Konvergenz $f_j \xrightarrow{L^p} f$
Literatur: Skript über die Faltung und approximative Einheiten[3]

- *Do. 16.01.2020*: absolut stetige Funktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral (ohne Beweis), die Cantor-Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ist stetig und surjektiv aber nicht absolut stetig (und $f' = 0$ fast überall), monotone Funktionen sind fast überall differenzierbar (ohne Beweis), stetige lineare Funktionale auf Banachräumen, $\ell : E \to \mathbb{R}$ ist stetig g.d.w. eine Schranke $|\ell(v)| \le c\|v\|$ existiert, der Dualraum ist auch ein Banachraum (ohne Beweis), Beispiele von stetigen linearen Funktionalen (reguläre Borelmaße auf $C(X)$ für einen kompakten metrischen Raum X, L^q-Funktionen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ auf $L^p(\mu)$), der Satz von Riesz-Markow über $C(X)^*$ (ohne Beweis), der Rieszscher Darstellungssatz über $L^p(\mu)^*$ (ohne Beweis mit Ausnahme von $p = 2$), $L^2(\mu)$ als Hilbertraum, die Parallelogramgleichung, Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes im Fall $p = 2$
Literatur: die meisten Themen in dieser Vorlesung wurden ohne Beweis angeführt und sind daher nicht prüfungsrelevant. Die prüfungsrelevanten Ausnahmen sind die Charakterisierung von stetigen linearen Funktionalen (siehe Exercise 4.24 in Salamon) und der Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes für $p = 2$ (folgt von Theorem 4.26 in Salamon). Ansonsten: der Hauptsatz für Lebesgue-Integration wird in Kapitel 5 von Salamon behandelt, und der allgemeine Fall des Rieszschen Darstellungssatzes in §4.5 und §5.2. Für die Differenzierbarkeit fast überall von monotonen Funktionen, siehe Royden, "Real Analysis".

- *Di. 21.01.2020*: Divergenz und Rotation von Vektorfeldern, Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$, Aussagen vom Divergenzsatz von Gauß-Ostrogradski und Integralsatz von Stokes, Bedingungen für ein Vektorfeld der Gradient einer Funktion oder Rotation eines Vektorfeldes zu sein (noch ohne Beweis), Wiederholung von Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$, Karten, die Begriffe "Kurve" und "Fläche", Tangentialräume, Beispiele von Mannigfaltigkeiten (offene Mengen in $\mathbb{R}^n$, die n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und der Torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$), der Satz über den regulären Wert
Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten[4], *§1*

- *Do. 23.01.2020*: lokale Karten und Koordinatensysteme auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, Koordinatendarstellungen und Differenzierbarkeit von Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, Kartenübergänge, lokale Parametrisierungen, 1-Formen und lokale

[3] Skript verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_Faltung.pdf`

[4] Skript verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_DifferentialFormen.pdf`

Integration einer 1-Form auf einer 1-Mannigfaltigkeit, die Vektorräume $\Lambda^q V^*$ und $\Lambda^q T_p^* M$, $\dim \Lambda^m V^* = 1$ für $\dim V = m$ (noch ohne Beweis), die Transformationsformel $\omega(\mathbf{v}_1', \ldots, \mathbf{v}_m') = \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \cdot \mathrm{Det}(\mathbf{A})$ für $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1' & \cdots & \mathbf{v}_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \mathbf{A}$
Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, §2

- *Di. 28.01.2020*: der Raum $\Omega^q_\ell(M)$ der q-Formen von der Klasse C^ℓ, Definition von $\int_M \omega$ für eine Differentialform mit Träger im Bild einer lokalen Parametrisierung, Unabhängigkeit (bis auf Vorzeichen) von der Koordinatenwahl, orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Diffeomorphismen, Atlanten und Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten, Zerlegung der Eins, globale Definition des Integrals $\int_M \omega$ für M eine orientierte m-Mannigfaltigkeit und ω eine m-Form mit kompaktem Träger, Bedingungen für die Berechnung von $\int_M \omega$ mit nur einer Karte und ohne Zerlegung der Eins
  Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, §3

- *Do. 30.01.2020*: die Projektion $\mathrm{Alt} : \otimes^q V^* \to \Lambda^q V^*$, das Tensorprodukt und das äußere Produkt (Dach-/Wedgeprodukt), Basis von V und Dualbasis von $V^* = \Lambda^1 V^*$, Basis von $\Lambda^q V^*$ durch Produkte $\lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_q}$, $\dim \Lambda^q V^* = \binom{m}{q}$, Differential einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ als 1-Form $df \in \Omega^1(M)$, die Produktregel $d(fg) = f\,dg + g\,df$, lokale Koordinatenvektorfelder $e_1, \ldots, e_m$ und die Dualbasis durch Differentiale der Koordinaten $dx_1, \ldots, dx_m$, Koordinatendarstellung von $\omega \in \Omega^q(M)$ als $\sum_{i_1 < \ldots < i_q} f_{i_1 \ldots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, partielle Ableitungen einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und die Formel $df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$, neue Sichtweise auf die lokale Integrationsformel als $\int_{\mathcal{O}} f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = \int_{x(\mathcal{O})} f_x(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$ für die Koordinatendarstellung f_x von f
  Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, §4

- *Di. 4.02.2020*: die äußere Ableitung $d : \Omega^q_\ell(M) \to \Omega^{q+1}_{\ell-1}(M)$, Charakterisierung durch graduierte Leibnizregel und $d(df) = 0$, jede 1-Form auf $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist ein Differential, 1-Formen $\lambda \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ mit $d\lambda \neq 0$ können keine Differentiale sein, geschlossene und exakte Differentialformen, Aussage des Poincaré-Lemmas, Beispiel (ohne Beweis) einer geschlossenen aber nichtexakten 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (s. Aufgabe 15.B), das innere Produkt $\iota_X \omega \in \Omega^{q-1}(M)$ von einem Vektorfeld X mit einer q-Form $\omega \in \Omega^q(M)$, wie man für eine geschlossene q-Form ω auf einem n-dimensionalen Quader induktiv (bzgl. n) eine $(q-1)$-Form λ mit $d\lambda = \omega$ konstruieren kann, Beweisskizze des Poincaré-Lemmas
  Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, §5

- *Do. 6.02.2020*: der Halbraum $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$ und Untermannigfaltigkeiten mit Rand, ∂M ist auch eine Mannigfaltigkeit, Tangentialräume am Rand, Randorientierungen, Orientierungen auf 0-Mannigfaltigkeiten, Integration einer 0-Form über einer orientierten 0-Mannigfaltigkeit, der Satz von Stokes
  Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, §6

- *Di. 11.02.2020*: Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten und der Raum $\mathfrak{X}^\ell(M)$, die musikalischen Isomorphismen $\flat$ und $\sharp$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ist lokal ein Gradient $\Leftrightarrow d(\mathbf{X}^\flat) = 0$, die Standardvolumenform μ auf $\mathbb{R}^n$, $d\mathbf{V}^\flat = \iota_{\mathrm{rot}(\mathbf{V})}\mu$ für ein C^1-Vektorfeld $\mathbf{V}$ auf $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{V}$ auf $\mathbb{R}^3$ ist lokal ein Gradient $\Leftrightarrow \mathrm{rot}(\mathbf{V}) = 0$, $d(\iota_{\mathbf{V}}\mu) = \mathrm{div}(\mathbf{V}) \cdot \mu$, $\mathrm{div}(\mathbf{V}) = 0 \Leftrightarrow d(\iota_{\mathbf{V}}\mu) = 0$, $\mathbf{V}$ auf $\mathbb{R}^3$ ist lokal die Rotation eines anderen Vektorfeldes $\Leftrightarrow \mathrm{div}(\mathbf{V}) = 0$, Volumenformen auf Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$, die durch eine Orientierung bestimmte Volumenform, Normalenvektorfelder und Volumenformen auf $M \subset \mathbb{R}^n$

mit $\dim M = n - 1$, Beweise des Divergenzsatzes von Gauß-Ostrogradski und des Integralsatzes von Stokes
Literatur: Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, §*7*

- *Do. 13.02.2020*: allgemeine Wiederholung