Inhaltsbeschreibung

Allgemeine Informationen

Lehrpersonen: Prof. Chris Wendl (Vorlesung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
`wendl@math.hu-berlin.de`

Übungsleiter TBA

Website: `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2020/FunkAna/`

Vorlesung: Dienstags 15:00–17:00
Donnerstags 13:00–15:00

Übung: Donnerstags 15:00–17:00

Die Lehrveranstaltung findet online per Zoom statt. Zugangsdaten für die Zoom-Meetings werden kurz vor Semesterbeginn im Moodle-Kurs bekanntgegeben.

Sprache: Diese Lehrveranstaltung ist als *BMS Basic Course* aufgeführt und wird daher auf Englisch angeboten, es sei denn, alle Teilnehmer möchten sie auf Deutsch hören. Dies wird in der ersten Vorlesung entschieden. Falls Sie die Vorlesung unbedingt auf Englisch hören möchten aber am ersten Tag nicht pünktlich da sein können, bitte kontaktieren Sie den Dozenten im Voraus.

Voraussetzungen: Der Kurs basiert auf den HU-Vorlesungen *Analysis I–III* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I–II*, sowie auf dem analytischen Teil der Vorlesung *Algebra und Funktionentheorie*.

Die Studierenden sollten vor allem mit den Grundsätzen der Maßtheorie (einschließlich des Satzes von Fubini und der Vollständigkeit der L^p-Räume) vertraut sein.

Kurze Beschreibung

Der Kurs behandelt die *lineare* Funktionalanalysis, die sich als die Erforschung stetiger linearer Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen topologischen Vektorräumen (vor allem Banach- bzw. Hilberträumen) versteht. Die wichtigsten Beispiele solcher unendlich-dimensionaler Vektorräume sind Funktionenräume, die in Anwendungen sehr oft z.B. als Lösungsräume partieller Differentialgleichungen auftauchen. Der Stoff dieser Vorlesung soll also als wesentliche Vorbereitung auf alle weiteren Vorlesungen (sowohl in der Analysis und der angewandten Mathematik als auch in der Differentialgeometrie und der mathematischen Physik) betrachtet werden, die sich mit dem Thema partielle Differentialgleichungen befassen.

Programm

Der folgende Wochenplan ist vorläufig und Änderungen vorbehalten.

1. Grundlegende Begriffe der mengentheoretischen Topologie, topologische Vektorräume, lokal konvexe Vektorräume, Fréchet-, Banach- und Hilberträume, Beispiele

2. Stetige/beschränkte lineare Operatoren zwischen Banachräumen, die Operatornorm, Dualräume, das Lemma von Zorn, Hamel-Basen
3. Grundlegende Resultate über Hilberträume: Rieszscher Darstellungssatz, orthonormale Basen, orthogonale Projektionen
4. Eigenschaften der L^p-Räume auf $\mathbb{R}^n$: Dualität von L^p und L^q für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Faltung und die Youngsche Ungleichung, Approximation durch glatte Funktionen
5. Separabilität von L^p, schwache Konvergenz, der Satz von Banach-Alaoglu, absolute Stetigkeit und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
6. Die Fouriertransformation auf dem Schwartz-Raum und $L^2(\mathbb{R}^n)$
7. Periodische Funktionen und Fourierreihen auf $L^2(\mathbb{T}^n)$
8. Die Sobolevräume $H^k(\mathbb{R}^n)$ und $H^k(\mathbb{T}^n)$, Distributionen (verallgemeinerte Funktionen)
9. Die Sätze von Baire und Hahn-Banach
10. Der Satz von der offenen Abbildung, abgeschlossene Unterräume mit abgeschlossenen Komplementen
11. Kompakte Operatoren und Fredholm-Operatoren
12. Das Spektrum eines stetigen linearen Operators auf einem Hilbertraum, Polarzerlegung
13. Spektraltheorie beschränkter Operatoren
14. Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren und Spektraltheorie

Ein mögliches Zusatzthema, falls Zeit übrig bleibt: Differentialrechnung für nichtlineare Abbildungen zwischen Banachräumen

Literatur

Der Kurs folgt keinem einzelnen Buch, aber die folgenden Lehrbücher zum Thema sind herzlich empfohlen, vor allem das Buch von Reed und Simon.

- Reed und Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis*, revised and enlarged edition, Elsevier 2011
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbiblithek der HU)
- Bühler und Salamon, *Functional Analysis*, AMS 2018
  (Preprint-Version gratis auf Salamons Homepage:
  `https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/funcana-ams.pdf`)
- Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer 1985
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbiblithek der HU)

Für Themen in der Maßtheorie (z.B. Eigenschaften der L^p-Räume, Distributionen) empfehlen wir:

- Lieb und Loss, *Analysis*, 2nd edition, AMS 2001
  (verfügbar in der Universitätsbibliothek der HU, Freihandbestand)

Prüfung und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine 30-minutige mündliche Prüfung kurz nach Semesterende (mit Nachholtermin kurz vor Beginn des nächsten Semesters) bestimmt. In der Prüfung sollen Sie die Hauptdefinitionen der Vorlesung hinschreiben können, sowie ihre Bedeutung und Wichtigkeit (möglichst anhand von Beispielen) diskutieren, und die wichtigsten Anwendungen der Hauptresultate der Vorlesung und kurze Beweisskizzen dieser Resultate beschreiben.

Übungsblätter werden wöchentlich Donnerstags ausgehändigt und in der Übung eine Woche später besprochen, sind aber nicht abzugeben.

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte "**take-home midterm**". Diese hat die Form eines Übungsblatts, das innerhalb von zwei Wochen erarbeitet und abgegeben werden kann. Die Abgabe des Midterms ist freiwillig, aber je nach erreichter Gesamtpunktzahl kann die Prüfungsnote nach der folgenden Regel verbessert werden:

$$\text{Midterm} \geq 75\% = (2{,}0 \to 1{,}7 \text{ oder } 1{,}7 \to 1{,}3 \text{ usw.})$$