Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 1: Piratenquartett

(Aufgabe (a) : 4 Punkte, (b): 6 Punkte)

Vier Seeräuber – der Alte Antoine, Brülli, Carl und Dörtebecker – sind auf einer einsamen Karibikinsel auf Schatzsuche.

(a) Ihre Schatzkarte führt die Räuber nach langer Suche an den Eingang eines Tunnels. Der Tunnel ist dunkel und gefährlich, sodass man ihn nur mit eingeschalteter Taschenlampe durchqueren kann. Außerdem ist der Tunnel so alt, dass er wegen der hohen Einsturzgefahr nur von maximal zwei Leuten gleichzeitig durchquert werden kann.

Um von einem Ende des Tunnels zum anderen Ende zu gelangen, benötigt der Alte Antoine fünf Stunden, Brülli benötigt vier Stunden, Carl zwei Stunden und Dörtebecker nur eine Stunde. Die vier Seeräuber haben nur eine Taschenlampe, deren Batterien für genau 12 Stunden reichen.

Beschreibt eine Möglichkeit, wie alle vier Seeräuber bei Einhaltung der Bedingungen durch den Tunnel gelangen können. Begründet genau, warum es auf die von euch angegebene Weise möglich ist, durch den Tunnel zu kommen.

(b) Geschafft! Die vier haben am Ende des Tunnels eine Schatztruhe mit Goldmünzen gefunden (und obendrein glücklicherweise noch den Eingang zu einem viel einfacheren Weg zurück). Sie beschließen, den Schatz gerecht unter sich aufzuteilen, stellen aber fest, das dies nicht geht, und gehen daher erst einmal schlafen.

In der Nacht steht Dörtebecker heimlich auf, steckt sich zuerst eine Münze des Schatzes ein und nimmt sich danach genau ein Viertel des restlichen Schatzes. Damit verschwindet er über den neu entdeckten Weg von der Insel. Kurz darauf erwacht Carl. Ohne Dörtebeckers Verschwinden zu bemerken, hat er denselben Plan. Auch er steckt sich eine Münze des verbliebenen Schatzes ein und nimmt danach wieder genau ein Viertel des restlichen Piratenschatzes an sich. Auch Carl verschwindet dann heimlich.

Genauso machen es darauf Brülli, und danach der Alte Antoine. Jeder von ihnen bemerkt das Fehlen seiner Kumpanen nicht, steckt sich zunächst jeweils eine der vor ihm liegenden Münzen ein und nimmt sich danach genau ein Viertel des restlichen Schatzes und macht sich mit seinen Münzen aus dem Staub.

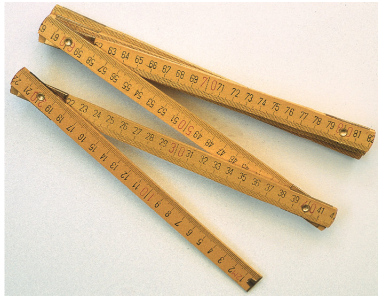
Jeder der Räuber glaubt nun, etwas mehr als ein Viertel des Schatzes bekommen zu haben und seinen schlafenden Kumpanen den Rest zurückgelassen zu haben. Am nächsten Morgen sind alle weg, und der Schatz besteht noch aus 78 Goldmünzen.

Ermittelt die Anzahl der Münzen, die jeder der Räuber mitgenommen hat. Schreibt euren Lösungsweg nachvollziehbar auf.

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

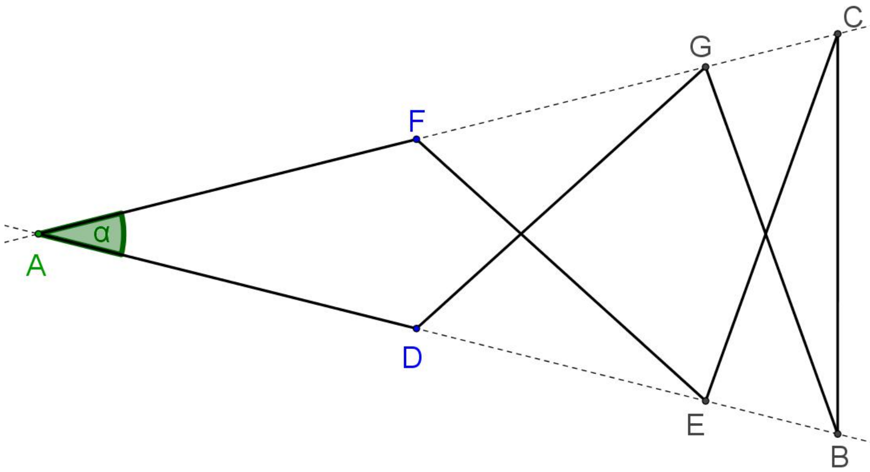
Aufgabe 2: Eine Winkeljagd am Zollstock *(10 Punkte)*

Elfie besitzt einen Zollstock wie in dem Bild rechts, der aus sieben gleich langen Stäben besteht. Die Enden der Stäbe sind drehbar miteinander verbunden.



Indem Anfang und Ende des Zollstocks aufeinandergelegt werden, wird dieser nun so geformt, wie auf dem Bild unten zu sehen ist. Die Verbindungspunkte A, D, E und B beziehungsweise A, F, G und C liegen hierbei jeweils auf einer Geraden.

Bestimmt die Größe des Winkels α, ohne ihn zu messen. Begründet dabei eure einzelnen Lösungsschritte mit Hilfe von euch bekannten mathematischen Sätzen.



Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht!

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3: Lehrer und ihre Fächer

(Aufgabe (a) : 6 Punkte, (b): 4 Punkte)

(a) An einer Schule werden die Unterrichtsstunden in Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von drei Lehrerinnen gehalten, Frau Meyer, Frau Wegener und Frau Teichert. Von diesen drei Lehrerinnen ist uns im Weiteren noch folgendes bekannt:

1. Jede von ihnen lehrt in zwei Fächern.
2. Die Lehrerin für Geographie und die Französischlehrerin sind Hausnachbarn.
3. Frau Meyer ist die jüngste von den dreien.
4. Alle drei – die Lehrerin für Biologie, die für Französisch und Frau Teichert – haben einen gemeinsamen Arbeitsweg.
5. Die Biologielehrerin ist älter als die Mathematiklehrerin.
6. In der Freizeit spielen die Englischlehrerin, die Mathematiklehrerin und Frau Meyer gern Doppelkopf, wenn sie einen „vierten Mann“ finden.

Wer unterrichtet welche Fächer? Benutzt zur Begründung eurer Entscheidung die vorgegebene Nummerierung der Aussagen in der Aufgabenstellung.

(b) Die Gruppe neben euch hat gerade versucht, die richtigen Fächerkombinationen einfach zu raten. Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit ihrem Tipp richtig liegen.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 4: Eine besondere Zahl *(10 Punkte)*

Es gibt genau eine zehnstellige Zahl, in der jede der Ziffern 0 bis 9 genau einmal vorkommt, und die die folgende Eigenschaft hat:

Betrachtet man statt der gesamten Zahl nur die ersten n Ziffern der Zahl (wobei n irgendeine Zahl zwischen 1 und 10 sein kann), so ist die entstehende Zahl immer durch n teilbar. Nimmt man also zum Beispiel die ersten drei Ziffern der Zahl, so ergibt sich eine Zahl, die durch 3 teilbar ist; die Zahl, die sich aus den ersten fünf Ziffern ergibt, ist durch 5 teilbar usw.

Findet diese Zahl. Begründet auch, wie ihr auf die Reihenfolge der Ziffern gekommen seid. Auch für richtige Teile der Zahl und entsprechende Begründungen gibt es Punkte.

Platz für die Lösung:

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) Es müssen mehrmals zwei Seeräuber durch den Tunnel hin und dann jeweils ein geeigneter mit der Taschenlampe wieder zurückgehen.

Erste Möglichkeit:

Carl und Dörtebecker hin – Dörtebecker zurück – Alter Antoine und Brülli hin –
– Carl zurück – Carl und Dörtebecker hin;

$(2 + 1 + 5 + 2 + 2 = 12)$

Zweite Möglichkeit:

Carl und Dörtebecker hin – Carl zurück – Alter Antoine und Brülli hin –
– Dörtebecker zurück – Carl und Dörtebecker hin

$(2 + 2 + 5 + 1 + 2 = 12)$

Dies sind alle möglichen Kombinationen.

(b) Die Aufgabe ist durch Rückwärtsrechnen lösbar.

Der **Alte Antoine** findet

$$78 : \frac{3}{4} + 1 = 104 + 1 = 105$$

Münzen vor. Davon nimmt er eine Münze und ein Viertel vom Rest, also

$$1 + \frac{1}{4} \cdot (105 - 1) = 1 + 26 = 27 \text{ Münzen.}$$

Entsprechend findet **Brülli**

$$105 : \frac{3}{4} + 1 = 141$$

Münzen und nimmt 36 Münzen mit.

Carl findet

$$141 : \frac{3}{4} + 1 = 189$$

Münzen vor und nimmt 48 davon mit.

Dörtebecker findet anfangs

$$189 : \frac{3}{4} + 1 = 253$$

Münzen vor und nimmt 64 Münzen mit.

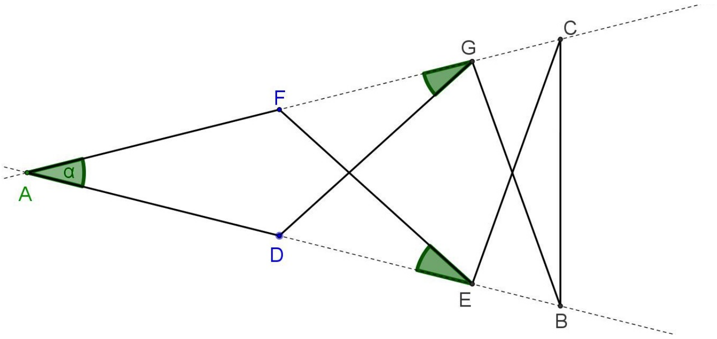
Insgesamt ergibt sich:

Alter Antoine – 27 Münzen, Brülli – 36 Münzen, Carl – 48 Münzen, Dörtebecker – 64 Münzen.

Lösung zu Aufgabe 2:

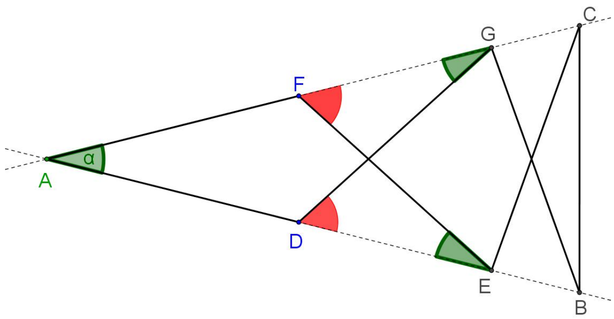
Grundlage für das Bestimmen der Winkelgröße ist die in der Aufgabe gegebene Abbildung.

1.



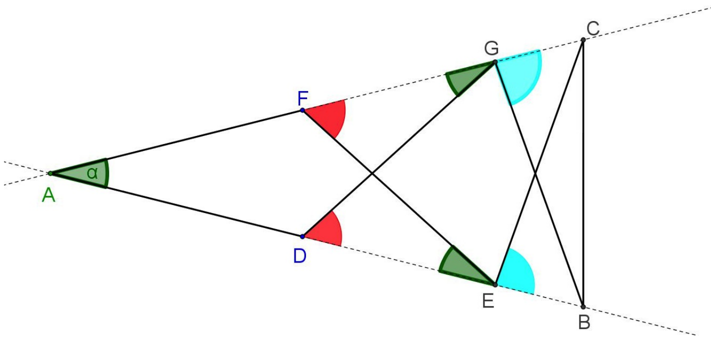
ΔADG und ΔAFE sind gleichschenklig lt. Voraussetzung $\Longrightarrow \angle AGD = \angle FEA = \alpha$.

2.



$\angle EDG$ und $\angle EFG$ sind Außenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke ΔADG und ΔAFE (vgl.1.) $\Longrightarrow$ Für die roten Winkel gilt $\angle EDG = \angle EFG = 2\alpha$.

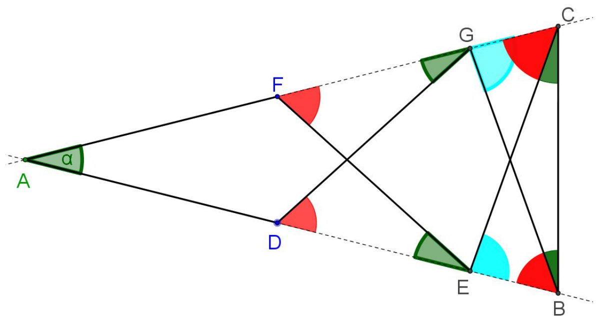
3.



ΔFEC und ΔDBG sind gleichseitig $\Longrightarrow \angle FEC = \angle DGB = 180° - 4\alpha$ wegen 2., also gilt (Winkelsumme an einer Geraden) für die hellblauen Winkel

$$\angle BEC = \angle BGC = 180° - \alpha - (180° - 4\alpha) = 3\alpha.$$

4.



Das Dreieck ΔEBC ist gleichseitig, also $\angle BEC = \angle EBG + \angle GBC$, und somit $\angle GBC = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$. Analog ergibt sich anhand von $\angle GBC$, dass $\angle EBC = \alpha$ ist.

5. Für das gesamte Dreieck ΔABC erhält man über den Innenwinkelsummensatz

$$180^\circ = \alpha + \angle CBA + \angle ACB = 7\alpha,$$

also

$$\alpha = \frac{180^\circ}{7} \approx 25,7^\circ.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

(a) Eine logische Tabelle kann nützlich sein.

	Biologie	Geographie	Englisch	Französisch	Geschichte	Mathematik
Meyer	– (3,5)	– (2,1)	– (6)	X(4,10)	X	– (6)
Wegener	X	–	X	– (11)	– (12)	–
Teichert	– (4)	X	– (14)	– (4)	– (12)	X(10,6)

$$
\begin{aligned}
(3), (5) &\implies \text{Frau Meyer unterrichtet nicht Biologie. (7)}\\
(6) &\implies \text{Frau Meyer unterrichtet nicht Englisch und nicht Mathematik. (8)}\\
(4) &\implies \text{Frau Teichert ist nicht Bio-Lehrerin und nicht Französischlehrerin. (9)}\\
(7), (8), (9) &\implies \text{Frau Wegener unterrichtet Biologie. (10)}\\
(4), (10) &\implies \text{Frau Meyer ist die Französischlehrerin. (11)}\\
(2), (1)\ , (11) &\implies \text{Frau Meyer unterrichtet auch Geschichte. (12)}\\
(10), (6) &\implies \text{Frau Teichert ist die Mathematiklehrerin. (13)}\\
(6),(13) &\implies \text{Frau Wegener unterrichtet Englisch. (14)}
\end{aligned}
$$

Frau Meyer unterrichtet Französisch/Geschichte,
Frau Wegener unterrichtet Biologie/Englisch und
Frau Teichert unterrichtet Geographie/Mathematik.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, die Kombinationen richtig zu raten, ist $\frac{1}{90} \approx 1,1\%$.

1. Lösungsweg: Urnenmodell

Die Fächer entsprechen den Kugeln. Nacheinander werden in vier Zügen die Fächer von Frau Meyer und Frau Wegener gezogen. Man erhält in den einzelnen Zügen durch Betrachtung der verbleibenden „günstigen Kugeln“:

- 1. Zug: Wahrscheinlichkeit für ein Fach von Frau Meyer: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- 2. Zug: Wahrscheinlichkeit für das zweite Fach von Frau Meyer: $\frac{1}{5}$
- 3. Zug: Wahrscheinlichkeit für ein Fach von Frau Frau Wegener: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- 4. Zug: Wahrscheinlichkeit für das zweite Fach von Frau Wegener: $\frac{1}{3}$

Insgesamt erhält man eine Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{90}.$$

2. Lösungsweg: Abzählen der Möglichkeiten

Es gibt 6! Möglichkeiten, die sechs Fächer auf die sechs Plätze

Meyer, 1. Fach; Meyer, 2. Fach;
Wegener, 1. Fach; Wegener, 2. Fach;
Teichert, 1. Fach; Teichert, 2. Fach

anzuordnen.
Die günstigen Fälle ergeben sich aus einer richtigen Kombination aus allen Möglichkeiten, jeweils erstes und zweites Fach zu vertauschen, also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Man erhält für die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{8}{6!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{90}.$$

Lösung zur Aufgabe 4:

Die Ziffer an der i-ten Stelle der Zahl wird im Folgenden mit a_i bezeichnet. Für die Zahl, die sich aus den k Ziffern $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ in dieser Reihenfolge zusammensetzt, nutzen wir die Bezeichnung $(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})$. Die Zahl selbst ist also $(a_1 a_2 \ldots a_{10})$, die aus den ersten ℓ Ziffern beispielsweise $(a_1 a_2 \ldots a_\ell)$.

(i) Zunächst erkennt man, dass die Zahlen, die aus den ersten zwei, vier, sechs, acht und zehn Ziffern gebildet werden, durch eine gerade Zahl teilbar sein müssen. Die ungeraden Ziffern müssen also an den ungeraden Stellen stehen, die geraden an den geraden.

(ii) Da die gesamte Zahl mit zehn Stellen durch zehn teilbar sein muss, ist $a_{10} = 0$.

(iii) Die Zahl aus den ersten fünf Ziffern ist durch fünf teilbar; da die Null schon vergeben ist, ist $a_5 = 5$.

(iv) Die Zahl $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ muss durch 4 teilbar sein. Da a_3 nach (i) ungerade ist, geht das nur, wenn $a_4 = 2$ oder $a_4 = 6$ ist (die Null wurde in (ii) schon vergeben).

(v) Die Zahlen $(a_1 a_2 a_3)$ und auch $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ sind durch drei teilbar. Damit sind auch ihre Quersummen durch drei teilbar, damit auch die Differenz $a_4 + a_5 + a_6$ dieser Quersummen, und damit auch die Zahl $(a_4 a_5 a_6)$. Mit (iii) und (iv) ergibt sich zwingend eine der Formen $(a_4 a_5 a_6) = (25 a_6)$ oder $(a_4 a_5 a_6) = (65 a_6)$, also expliziter die Möglichkeiten 252, 255, 258, 651, 654, 657. Die Ziffer a_6 ist gerade nach (i), also bleiben 252, 258 und 654; da keine Ziffer doppelt vorkommen darf, fällt die erste Möglichkeit weg. Es bleiben also die Möglichkeiten $(a_4 a_5 a_6) = 258$ und $(a_4 a_5 a_6) = 654$.

(vi) Wir schließen nun $(a_4 a_5 a_6) = 258$ aus. Wäre $(a_4 a_5 a_6) = 258$, so bleiben für a_8 die Möglichkeiten $a_8 = 4$ oder $a_8 = 6$. Die Zahl $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8)$ ist durch acht teilbar genau dann, wenn $(a_6 a_7 a_8)$ durch acht teilbar ist. Es ist $a_6 = 8$ und a_7 ungerade. Da alle Zahlen der Form $(8 a_7 4)$ mit a_7 ungerade nicht durch acht teilbar sind, muss also $a_8 = 6$ und $a_2 = 4$ sein. Für die Besetzung der Stellen a_1 und a_3 folgt daraus, da $(a_1 4 a_3)$ durch drei teilbar sein muss und nur noch 1, 3 und 7 als ungerade Ziffern in Frage kommen, dass $(a_1 a_2 a_3) = (147)$ oder $(a_1 a_2 a_3) = (741)$ ist. Für a_7 bleiben die Möglichkeiten $a_7 = 9$ oder $a_7 = 3$. Damit die Zahl $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8)$ durch acht teilbar ist, muss (s.o.) $(8 a_7 6)$ durch 8 teilbar sein, also ist $a_7 = 9$ und $a_9 = 3$.
Es verbleiben die Möglichkeiten (147258963) und (741258963). Man prüft, dass für diese die Zahl aus den ersten sieben Ziffern nicht durch 7 teilbar ist. Die Möglichkeit $(a_4 a_5 a_6) = 258$ ist somit ausgeschlossen. Wir haben somit $(a_4 a_5 a_6) = 654$.

(vi) Für die geraden Stellen bleiben somit 2 und 8 auf a_2 und a_8 zu verteilen. Die Zahl $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8)$ ist durch acht teilbar genau dann, wenn $(a_6 a_7 a_8)$ durch acht teilbar ist. Es ist $a_6 = 4$ und a_7 ungerade. Da alle Zahlen der Form $(4 a_7 8)$ mit a_7 ungerade nicht durch acht teilbar sind, ist also $a_8 = 2$ und mithin als letzte zu vergebende gerade Stelle $a_2 = 8$. Weiterhin bleiben als Möglichkeiten für die siebte Stelle $a_7 = 3$ oder $a_7 = 7$.

(vii) Zu vergeben sind nun noch die Ziffern $1, 3, 5$ und 7 auf die Stellen a_1, a_3, a_7 und a_9. Da $(a_1 a_2 a_3)$ durch drei teilbar sein soll und $a_2 = 8$ ist, muss die Summe $a_1 + a_3$ modulo 3 Rest eins lassen. Ebenso muss $(a_7 a_8 a_9)$ durch drei teilbar sein und daher (da $a_8 = 8$ ist) $a_7 + a_9$ hierbei Rest eins lassen; zusätzlich ist nach (vi) $a_7 = 3$ oder $a_7 = 7$. Hierfür gibt es acht Möglichkeiten:

1896543270, 1896547230, 9816543270, 9816547230, 7896543210,
9876543210, 3816547290, 1836547290.

Hiervon ist nur für 3816547290 der aus den ersten sieben Ziffern gebildete Teil 3816547 durch sieben teilbar; die gesuchte Zahl ist also gefunden.