Den Preis eines Spitzers bezeichnen wir mit S, den Preis eines Bleistiftes mit B und den Preis eines Radiergummis mit R.

Es gilt laut Voraussetzung:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & S+B+R & = & 100, \\ (II) & S > 2B, & & \\ (III) & 3B > 4R, & & \\ (IV) & 3R > S. & & \end{array}$$

S, B und R sollen ganze Centbeträge sein, sind also natürliche Zahlen zwischen 1 und 100.

Wir probieren zunächst systematisch.

S	B	R	Summe
50	wegen $S > 2B$ höchstens 24	wegen $3B > 4R$ höchstens 17	höchstens 91 zu klein
60	wegen $3B > 4R$ mindestens 29	wegen $3R > S$ mindestens 21	mindestens 110 zu groß
55	wegen $3B > 4R$ mindestens 26	wegen $3R > S$ mindestens 19	mindestens 100
55	wegen $S > 2B$ höchstens 27	wegen $3B > 4R$ höchstens 20	höchstens 102
55 erfüllt	26 $55 > 2 \cdot 26$ und $3 \cdot 26 > 4 \cdot 19$	19 und $3 \cdot 19 > 55$ und $55 + 26 + 19 = 100$	100

Wir haben eine Lösung gefunden und müssen noch die anderen ausschließen. Für $S = 55$ gäbe es noch laut unserer Tabelle die Möglichkeit $B = 27$ und $R = 20$. Dies würde jedoch zu einer Summe größer als 100 führen.

Nun schließen wir andere Werte für S aus.

S	B	R	Summe
$S < 55$	wegen $S > 2B$ höchstens 26	wegen $3B > 4R$ höchstens 19	höchstens 99 zu klein
$S > 55$	wegen $3B > 4R$ mindestens 26	wegen $3R > S$ mindestens 19	mindestens 101 zu groß

Somit ist die gefundene Lösung die einzig mögliche.

alternative Lösung

$$\begin{array}{rrcl} (I) & S+B+R & = & 100, \\ (II) & S > 2B, & & \\ (III) & 3B > 4R, & & \\ (IV) & 3R > S. & & \end{array}$$

Dabei sind S, B und R natürliche Zahlen zwischen 1 und 100. Wir versuchen zuerst R genauer zu bestimmen und setzen dazu die Ungleichungen geschickt in (I) ein.

$$\begin{array}{rcl} 100 & = & S+B+R \\ & < & S+\frac{1}{2}S+R \\ & < & \frac{3}{2}\cdot 3R+R \\ & = & \frac{11}{2}R \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} 100 & = & S+B+R \\ & > & 2B+B+R \\ & > & 4R+R \\ & = & 5R \end{array}$$

d.h. $R = 19$

Damit erhalten wir das folgende System:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & S+B & = & 81, \\ (II) & S > 2B, & & \\ (III) & B > 25, & & \\ (IV) & 57 > S. & & \end{array}$$

Wir setzen $B = 81 - S$ in die Ungleichungen ein und erhalten:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & S+B & = & 81, \\ (II) & S > 54, & & \\ (III) & 56 > S, & & \\ (IV) & 57 > S. & & \end{array}$$

Damit muss $S = 55$ gelten und wir erhalten $B = 26$. Und diese Werte erfüllen als einzig mögliche alle Bedingungen.

weitere alternative Lösung

$$\begin{array}{rrcl} (I) & S+B+R & = & 100, \\ (II) & S > 2B, & & \\ (III) & 3B > 4R, & & \\ (IV) & 3R > S. & & \end{array}$$

Wir versuchen S genauer zu bestimmen und setzten dazu die Ungleichungen geschickt in Gleichung (I) ein.

$$\begin{array}{rcl} 100 & = & S+B+R \\ & < & S+B+\frac{3}{4}B \\ & < & S+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}S \\ & = & \frac{15}{8}S \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} 100 & = & S+B+R \\ & > & S+\frac{4}{3}R+R \\ & > & S+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}S \\ & = & \frac{16}{9}S \end{array}$$

d.h. $S = 54$ oder 55 oder 56

$$\Longrightarrow R = 19 \text{ oder } 20 \text{ und } B = 25 \text{ oder } 26 \text{ oder } 27.$$

Durch $S + B + R = 100$ kann man nun als potentielle Lösungen (54, 19, 27), (54, 20, 26), (55, 19, 25), (55, 20, 25) und (56,19,25) identifizieren. Davon erfüllt jedoch nur (55,19,26) alle Bedingungen.

a) Matheo lässt je einen Würfel mit den Augenzahlen 1–3–4 liegen und nutzt im zweiten Versuch noch zwei Würfel.

Von den 36 möglichen Ergebnissen a-b beim zweiten Versuch führen genau zwei – nämlich 2-5 und 5-2 – sofort zu einer „Großen Straße“. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

$$p_1 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Bei welchen Ergebnissen im zweiten Versuch ist genau eine Augenzahl geeignet? Dies ist bei 2-b mit $b \neq 5$, 5-b mit $b \neq 2$, a-2 mit $a \neq 5$ und a-5 mit $a \neq 2$ der Fall. Allerdings sind in dieser Liste 2-2 und 5-5 doppelt gezählt. Wir haben also $4 \cdot 5 - 2 = 18$ Ergebnisse, bei denen genau eine Augenzahl geeignet ist. Insgesamt gibt es für den zweiten Versuch $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Ergebnisse.

Wenn dann ein weiteres Mal mit dem letzten Würfel gewürfelt wird, ist $\frac{1}{6}$ der möglichen Ergebnisse geeignet. Wir erhalten

$$p_2 = \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Bei den übrigen sechzehn möglichen Ergebnissen des zweiten Versuches gibt es keine „verwertbare“ Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt und im dritten Versuch mit zwei Würfeln beide fehlenden Zahlen gewürfelt werden, ist mit den Überlegungen des ersten Falls

$$p_3 = \frac{16}{36} \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{81}.$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für eine „Große Straße“ nach dem vorgegebenen ersten Wurf ist die Summe der drei Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$p = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{2}{81} = \frac{53}{324} \approx 0,164$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit beträgt also etwa 16,4 %.

b) Wenn Charlotta zwei Würfel liegen lässt (mit den Augenzahlen a und b), so muss sie im dritten Versuch a–a–b oder a–b–b würfeln. Dafür gibt es zunächst 6 Möglichkeiten, je nachdem welcher Würfel welche Zahl zeigt (a-a-b, a-b-a, b-a-a und a-b-b, b-a-b, b-b-a). Mögliche Ergebnisse gibt es insgesamt 6^3. Damit erhalten wir

$$P(\text{Full house} \mid \text{zwei Würfel liegen lassen}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2}.$$

Wenn Charlotta mit allen Würfeln noch einmal würfelt, so muss sie anschließend a–a–a–b–b würfeln. Dabei können a und b aber alle Zahlen von 1 bis 6 annehmen, wobei $a \neq b$ gilt. Die Anzahl der günstigen Fälle ist also $6 \cdot 5 \cdot \binom{5}{2}$, denn es gibt 6 Möglichkeiten a zu wählen, 5 Möglichkeiten b zu wählen und $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten für die Wahl der beiden Würfel, die b zeigen, wodurch die Würfel, die a zeigen, eindeutig festgelegt sind.

Mögliche Ergebnisse gibt es insgesamt 6^5. Damit erhalten wir

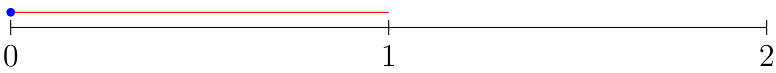
$$P(\text{Full house} \mid \text{alle neu würfeln}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 10}{6^5} = \frac{50}{6^4}.$$

Es ist

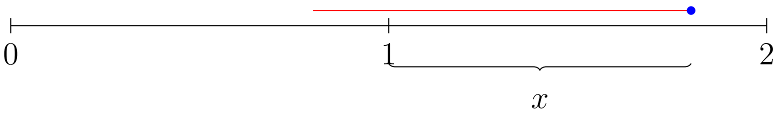
$$\frac{1}{6^2} = \frac{36}{6^4} < \frac{50}{6^4}.$$

Es ist also wahrscheinlicher, im dritten Versuch ein „Full House“ zu würfeln, wenn Charlotta mit allen Würfeln neu würfelt.

Die Geschwindigkeit der Schlange sei v, die Geschwindigkeit von Frederick sei $\widetilde{v}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist Frederick am Ende der Schlange an der Position 0.



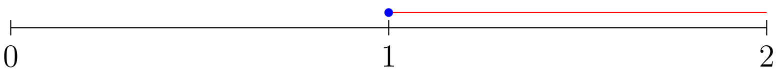
Zum Zeitpunkt $t = t_1$ hat Frederick die Schlange gerade komplett überholt und ist am Anfang der Gruppe. Die Schlange ist dabei um die Strecke x weitergelaufen.



Für den Zeitpunkt $t = t_1$ können wir also folgende Gleichungen aufstellen:

$$(I)\;\; t_1 \cdot \widetilde{v} = 1 + x \qquad (II)\;\; t_1 \cdot v = x.$$

Zum Zeitpunkt $t = t_2$ hat die Schlange 1 km zurückgelegt und Frederick ist wieder am Ende der Schlange.



Wir können für den Zeitpunkt $t = t_2$ die folgenden Gleichungen aufstellen:

$$(III)\;\; t_2 \cdot \widetilde{v} = 1 + 2x \qquad (IV)\;\; t_2 \cdot v = 1.$$

Wir stellen (IV) nach v um und setzen in (II) ein und erweitern mit $\widetilde{v}$:

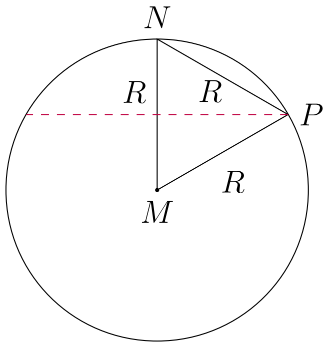
$$x = \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1\widetilde{v}}{t_2\widetilde{v}}.$$

Zähler und Nenner können wir durch die Gleichungen (I) und (III) ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} & x &=& \tfrac{1+x}{1+2x} \qquad (x > 0) \\ \iff\;& x + 2x^2 &=& 1 + x \\ \iff\;& x^2 &=& \tfrac{1}{2} \\ \overset{x>0}{\iff}\;& x &=& \tfrac{1}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Damit ist der von Frederick zurückgelegte Weg $1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$ Kilometer lang.

a) Wir schneiden die Kugel mit der Ebene durch den Mittelpunkt M und die beiden Punkte, in denen die Zirkelspitze (bei N) und Zirkelstift (bei P) gerade sind.

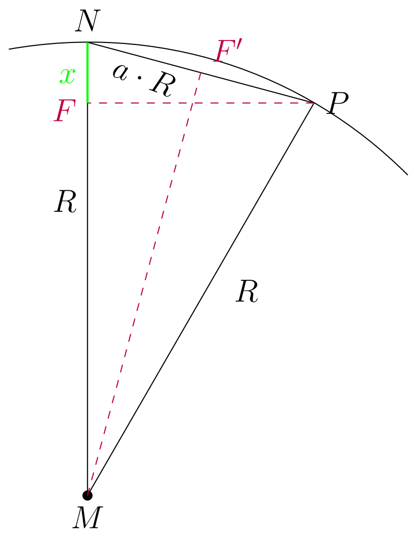


Das Dreieck ΔMPN ist gleichseitig mit Seitenlänge R. Der Radius des gezeichneten Kreises entspricht genau der Höhe in dem gleichseitigen Dreieck ΔMNP, beträgt also nach dem Satz des Pythagoras gerade

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}R.$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Umfang: $U = 2\pi r = \pi\sqrt{3}R$.

b) Es sei nun der eingestellte Zirkelradius $a \cdot R$, den Radius des gezeichneten Kreises bezeichnen wir mit r_a. Nun erhalten wir das folgende Bild.



Dabei ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf MN und F' der Fußpunkt des Lotes von M auf NP.
Die Dreiecke $\Delta MF'N$ und ΔPFN sind ähnlich, da sie beide einen rechten Winkel und den Winkel in N gemeinsam haben. Es folgt also

$$\frac{r_a}{a \cdot R} = \frac{|\overline{MF'}|}{R} \iff r_a = a \cdot |\overline{MF'}|.$$

Nach dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck $\Delta MF'N$ folgt

$$\begin{aligned} r_a &= a \cdot |\overline{MF'}| \\ &= a \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{a \cdot R}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} a \cdot R \cdot \sqrt{4 - a^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt für den gesuchten Umfang $U = 2\pi r_a = \pi \cdot a \cdot R \cdot \sqrt{4 - a^2}$.

zweiter Lösungweg

Wir nutzen den Satz des Pythagoras für die rechtwinkligen Dreiecke ΔPFM und ΔPFN.

Dabei sei $|\overline{NF}| = x$ und folglich $|\overline{MF}| = R - x$.

Es gilt:

$$(I) \;\; x^2 = (aR)^2 - r_a^2 \qquad (II) \;\; R^2 = r_a^2 + (R - x)^2.$$

Einsetzen von (I) in (II) unter Beachtung $x > 0$ liefert:

$$\begin{aligned} R^2 &= r_a^2 + (R - \sqrt{(aR)^2 - r_a^2})^2 \\ &= r_a^2 + R^2 - 2R\sqrt{(aR)^2 - r_a^2} + ((aR)^2 - r_a^2) \\ \iff \quad \sqrt{(aR)^2 - r_a^2} &= \frac{a^2 R}{2} \\ \iff \quad (aR)^2 - r_a^2 &= \frac{a^4 R^2}{4} \\ \iff \quad (aR)^2 - \frac{a^4 R^2}{4} &= r_a^2 \\ \iff \quad \frac{1}{2} aR \cdot \sqrt{4 - a^2} &= r_a. \end{aligned}$$

Damit folgt für den Umfang $U = 2\pi r_a = \pi \cdot a \cdot R \cdot \sqrt{4 - a^2}$.